Convexité et tracé de courbes

1. Étudier la convexité des fonctions suivantes puis tracer leur courbe dans un repère orthogonal.

   (a) $f(x) = e^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}$.
   (b) $g(x) = xln(x)$ si x>0 et 0 si x=0
   (c) $h(x) = x^2 - xln(x) + 1$ si x>0 et 1 si x=0

2. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer : le tableau de variation, la convexité et les limites aux bornes. Puis, tracer le courbe des fonctions dans un repère orthogonal.

   (a) $f(x) = x^2e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$. (b) $g(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$ sur $\mathbb{R}$. (c) $h(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \leqslant 0 \\ x\ln\, x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

3. On pose la fonction $f(x) = \frac{1-x}{x}e^{-\frac{1}{x}}$ définie sur $\mathbb{R}/\{0,1\}$.
   (a) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
   (b) Calculer f', en déduire les variations de f.
   (c) Tracer la courbe de f dans un repère orthogonal.

4. Tracer la courbe des fonctions suivantes :

   (a) * $F(x) = \frac{1}{x} - \left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor$ sur $\left[\frac{1}{4}, 2\right]$. (b) $G(x) = \frac{\lfloor x\rfloor}{x}$ sur $\mathbb{R}*$.

   (c) $H(x) = \begin{cases} \frac{ln(x)}{x} & \text{s. } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ (d) $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} nx^n$ sur Df que l'on précisera.

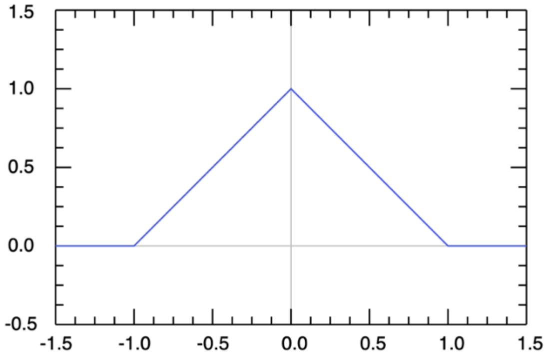
5. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$.

   (a) Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et expliciter f'.
   (b) Dresser le tableau de variations de f (limites incluses).
   (c) Étudier la convexité de f et montrer (0,0) est l'unique point d'inflexion.
   (d) Tracer dans un repère orthonormé $\mathcal{C}_f$, ainsi que la tangente au point d'inflexion.

6. Un problème de concours
   On va étudier la fonction : $\varphi\colon]0;+\infty\Big[\longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.
   a) Montrer que φ est de classe C^3 sur $]0;+\infty[$, calculer, pour tout x de $]0;+\infty[$, $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$, et montrer : $\forall x \in]0;+\infty\Big[,\ \varphi'''(x) = \mathrm{e}^x + \frac{3x+1}{x^5}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$
   b) Étudier le sens de variation de φ'' et calculer $\varphi''(1)$.
   En déduire le sens de variations de φ', et montrer :
   c) $\forall x \in]0;+\infty[,\ \varphi'(x) \geqslant \mathrm{e}$.
   d) Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives.
   e) Déterminer la limite de $\frac{\varphi(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$, et la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
   f) On admet : $15 < \varphi(3) < 16$. Montrer : $\forall x \in [3;+\infty[,\ \varphi(x) \geqslant ex$.
   On note C la courbe représentative de φ.
   g) Montrer que C admet un unique point d'inflexion, déterminer les coordonnées de celui-ci et une équation de la tangente en ce point.
   h) Dresser le tableau de variations de φ, avec les limites en 0 et en $+\infty$, et la valeur en 1.

i) Tracer l'allure de C et faire apparaitre la tangente au point d'inflexion.

7. On donne la courbe de la fonction affine par morceaux suivante :



(a) Donner son expression littérale (avec une accolade).
(b) Que dire, graphiquement, de la convexité de cette fonction ? De sa continuité ? De sa dérivabilité ?

8. En revenant à la définition de la convexité, montrer que pour tous réels a et b :
$e^{\frac{a+b}{2}} \leqslant \frac{e^a+e^b}{2}$.

9. Soit $m \geqslant 2$, étudier la convexité de $x \longmapsto (1+x)^m$, pour $x \geqslant -1$.
En déduire que : $\forall x \geqslant -1,\ (1+x)^m \geqslant 1+mx$.

10. On considère une fonction f convexe sur $\mathbb{R}$ et une fonction g convexe et croissante sur $\mathbb{R}$.
    (a) On suppose que f et g sont deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$. Montrer que gof est convexe sur $\mathbb{R}$.
    (b) On ne suppose plus que f et g sont dérivables. Montrer que gof est convexe sur $\mathbb{R}$.

11. Extrait de Maths 2 HEC 2017

    On définit la fonction f, définie sur R, par la formule f(x)=$\frac{1}{e^x+e^{-x}}$.
    (a) Calculer f' et montrer que f' est paire.
    (b) Déterminer les points d'inflexion de f' (oui de f' et non de f !).
    (c) Tracer la courbe de f'.

12. Extrait de Maths 2 HEC 2012 ECE
    On note λ un paramètre réel strictement positif. On considère la fonction f_λ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{2\sqrt{x}} e^{-\lambda\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

    (a) Dresser le tableau de variation de f_λ sur $\mathbb{R}_+^*$ et préciser ses limites aux bornes.
    (b) Établir la convexité de la fonction f_λ sur $\mathbb{R}_+^*$.
    (c) Tracer l'allure de la courbe représentative de f_λ.

13. Étudier, en fonction de n, les variations et la convexité de la fonction f_n dans les cas suivants :
    (a) $\forall n \in [\![3;+\infty[\![.\ \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = x^n e^{-x}$.
    (b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f_n(x) = \frac{\ln x}{x^n}$.
    (c) Tracer les courbes représentatives des fonctions f_n pour tout $n \in [\![3,5]\!]$.
    (d) Vérifier vos résultats avec Python.