Lois discrètes usuelles

1. Modéliser les situations suivantes à l'aide des lois discrètes du cours. A chaque fois, on justifiera précisément à l'aide du vocabulaire du cours.

    (a) On lance un dé équilibré à 6 faces et on note X la variable égale au numéro obtenu.
    (b) On lance 100 fois un dé équilibré à 6 faces et on note X la variable égale au nombre de numéros impairs obtenus.
    (c) On tire des boules successivement et avec remise dans une urne contenant n boules jusqu'à obtenir le numéro 1. On note X le nombre de boules tirées.
    (d) On lance deux dés successivement de manière indépendante jusqu'à ce que la somme des deux numéros obtenus soit inférieure ou égale à 3. On note alors X le nombre de fois où on a lancers les deux dés.
    (e) Une urne contient 15 boules (5 noires, 3 blanches et 7 rouges). On tire successivement et avec re- mise 20 boules et on note X la variable égale au nombre de boules noires.

2. On considère une variable X de loi $B(p), p \in]0,1[$.
    (a) Calculer $E(e^X), E(X^3)$ et $E(X^2 - X)$.
    (b) Déterminer la loi de $Y = 2X - 1$, son espérance et sa variance.

3. On dispose d'une urne contenant 1 boule noire et n-1 boules blanches. On pioche n boules successivement et avec remise dans cette urne et on note X le nombre de boules noires obtenues.
    (a) Donner la loi de X. Combien de boules noires a-t-on en moyenne ?
    (b) Donner la loi de Y=n-X sans faire de calculs.

4. Soit une variable X de loi B (n,$\frac{1}{2}$).
    (a) Calculer E(X^2) sans utiliser le théorème de transfert.
    (b) En déduire, en utilisant le théorème de transfert, la valeur de : $\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{m}{k}$
    (c) Pour tout réel t, calculer E(e^{-tX})?

5. Un péage comporte 10 guichets numérotés de 1 à 10. Le nombre N de voit ures arrivant au péage en une heure suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose que les conducteurs choisissent leur file au hasard, indépendamment les uns des autres. On note X_1 le nombre de voitures arrivant au guichet 1 en une heure.
    (a) Donner $E(N)$ et interpréter la valeur λ.
    (b) Avec quelle probabilité une voiture arrivant au péage va-t-elle au guichet 1 ?
    (c) Calculer $P_{(N=n)}(X_1 = k)$ pour tout $k \in [0; n]$ puis pour $k > n$.
    (d) En utilisant la formule des probabilités totales, déterminer $P(X_1 = k)$.
    (e) Déduire la loi de X_1, son espérance et sa variance.

6. On considère une variable X de loi G(p).
    (a) Calculer E(X^2) à l'aide du cours.
    (b) En déduire la valeur de : $\sum_{k=0}^{+\infty} k^2 p^k$
    (c) Montrer que E(e^{-X}) existe et la calculer.
    (d) Pour quelles valeurs de t, E(e^{-tX}) existe ?

7. Une urne contient des boules blanches et noires. On suppose que la probabilité de piocher une blanche vaut $p \in]0,1[$. On effectue des tirages successifs avec remise.
Soit X_1 la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche. Soit X_2 la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la deuxième boule blanche.
   (a) Reconnaître la loi de X_1 et donner la valeur de $E(X_1)$ et de $V(X_1)$.
   (b) Déterminer la loi de X_2 ainsi que son espérance.

8. On considère une variable X de loi P(u), où u>0.
   (a) Calculer E(X^2) à l'aide du cours.
   (b) En déduire la valeur de : $\sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \frac{u^k}{k!}$
   (c) Pour tout réel t, montrer que E(e^{-tX}) existe et la calculer.

9. Soit X une variable aléatoire sur $\mathbb{N}^*$ telle que
$$\forall s,t \in \mathbb{N}^*,\ \mathbf{P}_{[\mathrm{X}>s]}([\mathrm{X} > s+t]) = \mathbf{P}([\mathrm{X} > t]).$$
Posons $p = \mathbf{P}([\mathrm{X} = 1])$.
   (a) Rappeler le nom de cette propriété.
   (b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer $\mathbf{P}([\mathrm{X} > k])$ en fonction de p.
   (c) En déduire X suit une loi géométrique de paramètre p.

10. Un mobile se déplace sur un axe gradué. Il est initialement à l'origine.
On lance de manière indépendante n pièces équilibrées. À chaque lancer, on déplace d'une unité le mobile vers la gauche si un Face apparaît et vers la droite si un Pile sort. Notons X_n l'abscisse du pion à la fin des n lancers et Y_n le nombre de Faces obtenus. Par exemple, si on fait 5 lancers donnant 3 faces et 2 piles, le mobile se trouve en position -1.

   (a) Donner la loi de Y_n. Préciser l'espérance et la variance.
   (b) Exprimer X_n en fonction de Y_n.
   (c) Préciser $\mathbf{P}(\mathrm{X}_n = 0)$ en fonction de la parité de n.
   (d) En déduire l'espérance et la variance de X_n.

11. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes deux une loi géométrique de paramètres respectifs $\frac{1}{5}$ et $\frac{1}{2}$. Soit $Z = X - Y$.
   (a) Décrire l'évènement $[X = Y]$ puis en déduire sa probabilité.
   (b) Donner $Z(\Omega)$. Justifier que Z possède une espérance et la calculer.
   (c) Donner $\mathbb{P}([Z = 0])$.Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $\mathbb{P}([Z = k])$ et $\mathbb{P}([Z = -k])$.
   (d) Vérifier que $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}([Z = k]) = 1$.