Lycée Jacques Decour

Applications du Binôme de Newton

1. Soient $n, p \geq 1$. Redémontrer que $\binom{n-1}{p-1} = \frac{p}{n}\binom{n}{p}$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$ et a, b réels non nuls, simplifier les expressions suivantes :
   $(n+1)! - n!$; $\frac{(n+3)!}{(n+1)!}$; $\frac{n+2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}$; $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ où $u_n = \frac{a^n}{n!b^{2n}}$.

3. (a) Développer $(x+1)^6, (x-1)^6$.
   (b) Démontrer que, pour tout entier n, on a $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$.
   (c) Démontrer que, pour tout entier n, on a $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 2^p = 3^n$.
   (d) Démontrer que, pour tout entier n, on a $\sum_{k=1}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k 2^{k-1} = 0$.

4. Montrer que $(\sqrt{2} - \sqrt{3})^4 = 49 - 20\sqrt{6}$.

5. Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [[0, n]]$, la somme : $S_k = \sum_{p=0}^{k} (-1)^p \binom{n}{n-p}\binom{n-p}{n-k}$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
   Calculer les sommes suivantes :
   $$S_n = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} a^k b^{n-k}, T_n = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$
   En déduire les sommes : $U_n = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$ et $V_n = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}$.

7. On pose les matrices pour tous $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
   (a) Soit $k \in \mathbb{N}$, calculer J^k (conjecturer une formule et la prouver par récurrence).
   (b) Écrire A, A^2 et A^3 en fonction de I et J.
   (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1} b^k (a-b)^{n-k} = \frac{1}{3}[(a+2b)^n - (a-b)^n]$.
   (d) En déduire, A^n en fonction de I et J.

8. On considère les matrices : $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   On pose $T = D + N$.
   (a) Déterminer N^2.
   (b) Utiliser la formule du binôme pour montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, T^n = D^n + nD^{n-1}N$.

9. On pose $T = D + N$.
   (a) Déterminer N^2.
   (b) Utiliser la formule du binôme pour montrer que :
   $\forall n \in \mathbb{N}^*, T^n = D^n + nD^{n-1}N$.

10. Calculer la puissance n-ième de $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, pour n entier positif. Faire de même avec n entier négatif, si cela est possible.

G. Bignon