

Convexité et tracé de courbes

1 - Convexité.

Dans toute cette partie, I désigne un intervalle.

Définition: Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, soit $n \in \mathbb{N}$.

On dit que f est de classe C^n sur I si:

- f est dérivable n fois sur I
- la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f , notée $f^{(n)}$, est continue sur I

On note alors $f \in C^n(I, \mathbb{R})$.

On dit que f est de classe C^∞ sur I si $f \in C^n(I, \mathbb{R})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Proposition: Les fonctions polynômes, exponentielles, logarithmes, inverse sont de classe C^∞ là où elles sont définies.

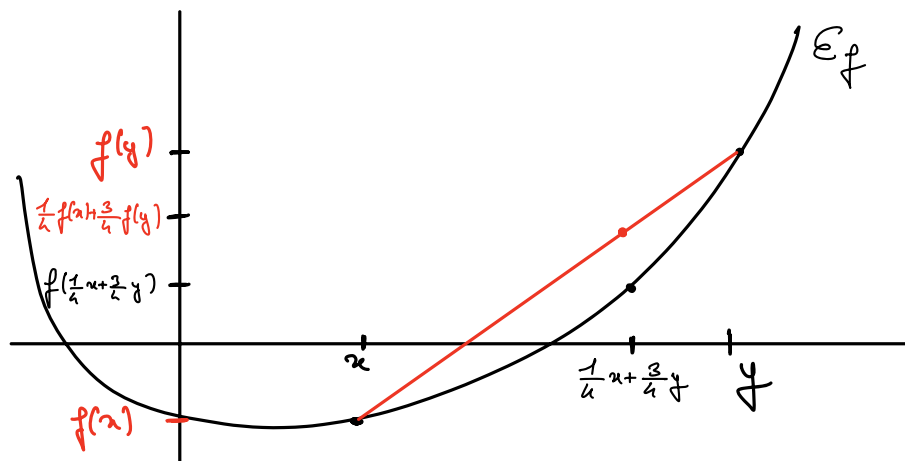
Remarque: $C^0(I, \mathbb{R})$ correspond aux fonctions continues sur I .

- C^0 est parfois notée comme abréviation du mot continue.
- f' et f'' peuvent donc se noter $f^{(1)}$ et $f^{(2)}$ et $f = f^{(0)}$.

Définition: Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est convexe sur I si:

$$\forall (x, y) \in I^2, \forall t \in [0, 1] \quad f(tx + (1-t)y) \leq t f(x) + (1-t) f(y)$$

Graphiquement, cela signifie que la courbe de f est au dessus de ses cordes :



Ici on a pris 2 points x et y et $t = \frac{1}{4}$ en particulier.

Lorsque $t \in [0, 1]$ le point $tx + (1-t)y$ est un point du segment $[x, y]$, plus t est proche de 1 plus $tx + (1-t)y$ est proche de x , si t est proche de 0, c'est l'inverse.

Remarque: Cette définition ne sera pas utilisée en pratique pour prouver qu'une fonction est concave, elle est trop lourde : il faut montrer une inégalité pour 3 variables x, y et t . On va caractériser la concavité pour des fonctions dérivables.

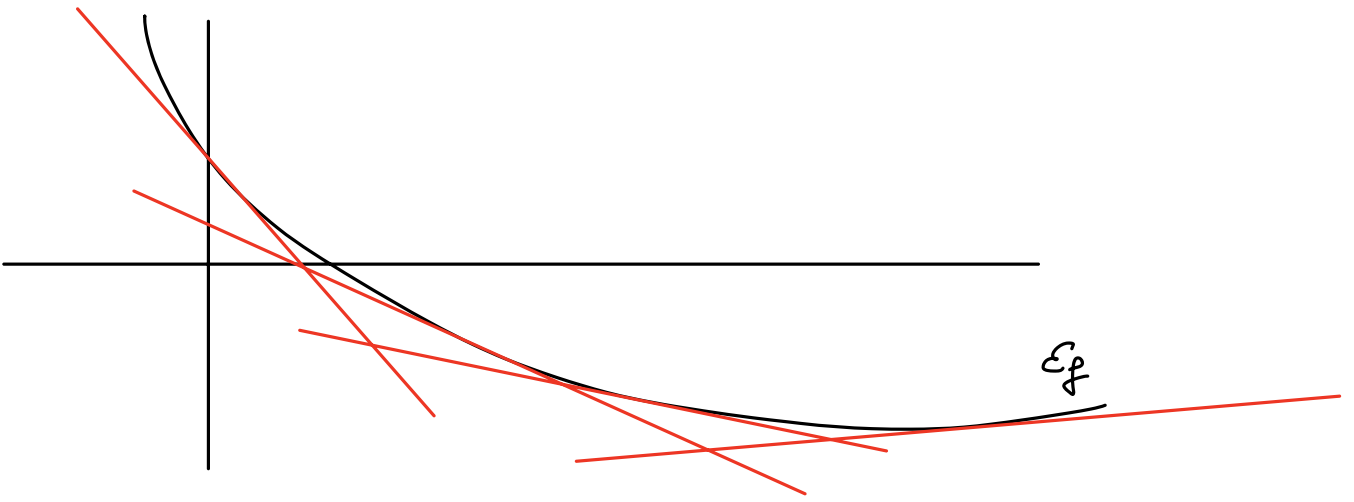
Proposition: Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 sur I . On a équivalence entre:

- (i) f est concave sur I
- (ii) f' est décroissante sur I
- (iii) E_f est au dessus de ses tangentes sur I
- (iv) f'' est négative sur I

Remarque: Le 3^{em} point se formule ainsi:

$$\forall a \in I, \forall x \in I, f(x) \geq \underline{f'(a)(x-a) + f(a)}$$

équation de la tangente à E_f au point d'abscisse a .



En pratique, on montre la concavité en regardant le signe de f'' et on en déduit des inégalités en exploitant les tangentes ou les cordes.

Définition: Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est concave sur I si
 $-f$ est convexe sur I .

Ainsi, si f est de classe C^2 sur I , on a équivalence entre :

- (i) f est concave sur I
- (ii) f' est décroissante sur I
- (iii) E_f est en dessous de ses tangentes sur I
- (iv) f'' est négative sur I

Proposition: . $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x \geq 1+x$. $\forall x > 0 \quad \ln x \leq x-1$

Preuve: . La fonction $f: x \mapsto e^x$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) = e^x \geq 0$

donc f est convexe sur $\mathbb{R}$ donc E_f est au dessus de ses tangentes, en particulier celle

au point $a=0$: $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x \geq e^0(x-0) + e^0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad e^x \geq x+1$.

• La fonction $g: x \mapsto \ln x$ est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ et : $\forall x > 0 \quad g''(x) = -\frac{1}{x^2} \leq 0$

donc g est concave sur $]0, +\infty[$ donc E_g est en dessous de ses tangentes, en particulier elle au point $a=1$: $\forall x > 0 \quad \ln x \leq \frac{1}{1}(x-1) + \ln 1 \Leftrightarrow \forall x > 0 \quad \ln x \leq x-1$.

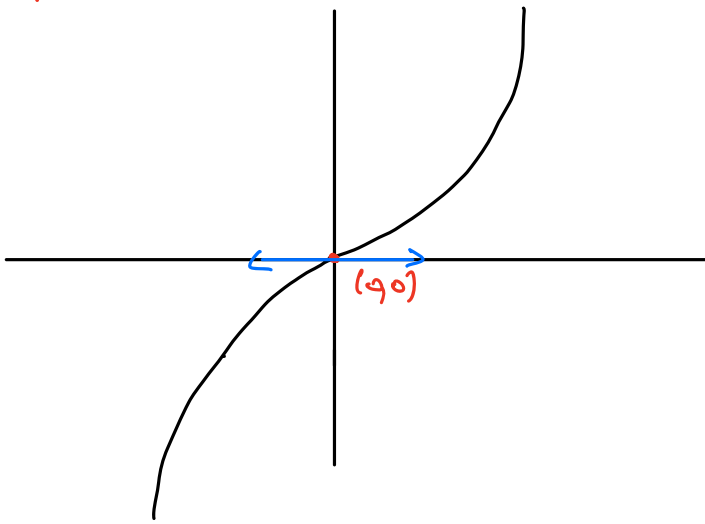
2 - Tracé de courbes

Définition: Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 sur I et $a \in I$.

On dit que le point $(a, f(a))$ est un point d'inflexion de la courbe de f si $f''(a) = 0$ et f'' change de signe en a .

exemple: $f(x) = x^3$ sur $\mathbb{R}$. $f''(x) = 6x$ donc f'' change de signe en 0 uniquement.

$(0, f(0)) = (0, 0)$, est le seul point d'inflexion de E_f .



Notons que la tangente en 0 d'équation:

$$y = f'(0)(x-0) + f(0) = 0$$

coupe la courbe au point d'inflexion.

Proposition: Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.

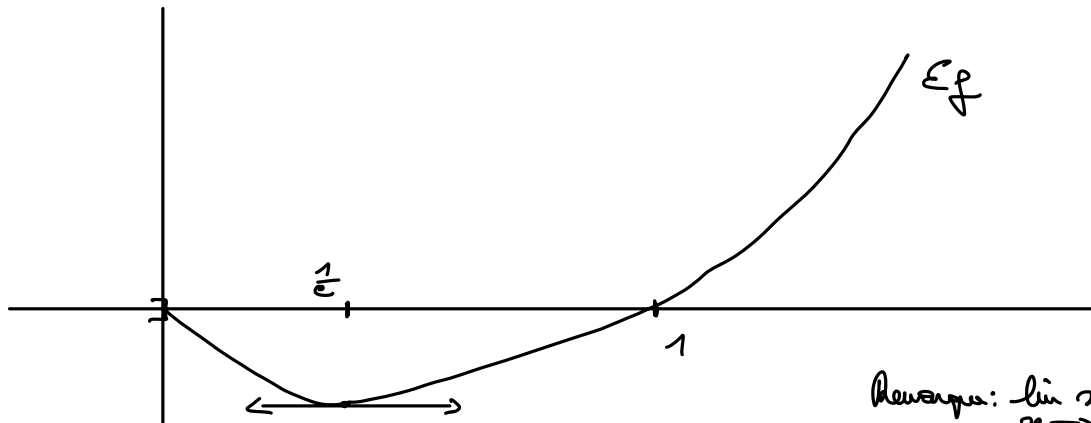
Si : $\left| \begin{array}{l} f \text{ est convexe sur } I \\ f'(a) = 0 \end{array} \right.$ alors f admet un minimum global en a sur I .

exemple: Soit $f(x) = x \ln x$ sur $]0, +\infty[$

$\forall x > 0, f'(x) = \ln x + x \frac{1}{x} = \ln x + 1, f''(x) = \frac{1}{x} > 0$ sur $]0, +\infty[$.

donc f est convexe sur $]0, +\infty[$, et $f'(\frac{1}{e}) = \ln(\frac{1}{e}) + 1 = -1 + 1 = 0$

donc f a un minimum global en $x = \frac{1}{e}$.



Remarque: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ par variation croissante

donc f est prolongée par continuité en 0.

Méthode pour tracer une courbe.

① Bien identifier l'ensemble de définition comme un intervalle ou une union d'intervalles.

ex: $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\} =]-\infty, 0[\cup]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

② Calculer les limites aux bornes de cet ensemble et tracer les asymptotes éventuelles (verticales ou horizontales).

ex: si $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ donc 4 limites, en: $-\infty, 0^-, 0^+, +\infty$.

③ Bien identifier le domaine de continuité (et les éventuels prolongements par continuité).

④ Dresser le tableau de variation de f .

⑤ Déterminer la concavité de f si on vous a demandé de le faire explicitement sinon on ne s'en préoccupe pas. Faire apparaître les éventuels points d'inflexion.

⑥ Faire apparaitre les symétries de la courbe si la fonction est paire ou impaire.

- Dans la pratique des sujets, chacun de ces points fera l'objet de questions intermédiaires et le tracé de la courbe sera une des dernières questions.

exemple: Tracer la courbe de $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ sur $\text{df} = \mathbb{R} \setminus \{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

• f est dérivable et; $\forall x \neq 0 \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} < 0$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$ ($e^{-\infty} = 0$); $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$. Asymptotes horizontales en $-\infty$ et $+\infty$: $y = 1$; asymptote verticale: $x = 0$.

Ainsi on peut dresser le tableau:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	1	$\begin{matrix} +\infty \\ 0 \end{matrix}$	1

• f est de classe C^2 et: $f''(x) = \frac{2}{x^3} e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^4} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{2x+1}{x^4} \right)$

donc $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$.

Il y a un point d'inflexion en $(-\frac{1}{2}, e^{-2})$.

