

Expériences de Bernoulli

Définition: Une expérience de Bernoulli est une expérience aléatoire se soldant par un succès ou un échec.

exemples: Un lancer de pièce où le succès est obtenir pile.

Un lancer de dé où le succès est obtenir un nombre pair.

1. Répétitions finies d'expériences de Bernoulli.

Définition: Etant donné une expérience de Bernoulli où le succès a pour probabilité $p \in]0, 1[$. La variable aléatoire X égale à 1 si le succès survient et 0 sinon est dite, de loi de Bernoulli de paramètre p , notée $B(p)$.

Ainsi, $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et $P(X=1) = p$; $P(X=0) = 1-p$.

Proposition: Si $X \sim B(p)$ alors $E(X) = p$ et $V(X) = p(1-p)$.

Preuve: $X(\Omega)$ est fini donc E et V existent et :

$$E(X) = 0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=1) = p.$$

$$E(X^2) = E(X) = p \text{ puisque } X^2 = X \text{ (car } X(\Omega) = \{0, 1\})$$

donc d'après la formule de Huygens: $V(X) = p - p^2 = p(1-p)$.

Définition: On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètre n et p ($n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$), notée $B(n,p)$, si X est égale au nombre de succès obtenus lors d'une répétition de n expériences de Bernoulli identiques et indépendantes.

exemples: On lance les dés équilibrés à 6 faces et on note X le nombre de 1 obtenus. Alors $X \in B(10, \frac{1}{6})$.

Proposition: Soit $X \in B(n,p)$. La loi de X est donnée par :

$$\forall k \in [0, n], P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Preuve: X compte donc les succès obtenus parmi n expériences de Bernoulli identiques et indépendantes. Ainsi $X(\Omega) = [0, n]$ et pour $k \in [0, n]$, il y a $\binom{n}{k}$ issues résultant en exactement k succès (le nombre de façons les k succès parmi les n expériences), et chaque de ces issues a pour probabilité :

$$\underbrace{p \dots p}_{k \text{ succès}} \underbrace{(1-p) \dots (1-p)}_{n-k \text{ échecs}} = p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{Ainsi, } P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Proposition: Si $X \in B(n,p)$ alors $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$.

Preuve: On sait que, pour tout $k \leq n$, entiers naturels : $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ (*)

$$\text{en effet } k \binom{n}{k} = k \frac{n!}{k! (n-k)!} = \frac{n \times (n-1)!}{(k-1)! (n-1-(k-1))!} = n \binom{n-1}{k-1}.$$

Calculons alors $E(X) = \sum_{k=0}^m k \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k}$ (la somme en $k=0$ est nulle)

↙ changement d'indice:
 $k-1 = k$.

$$= \sum_{k=0}^{m-1} m \binom{m-1}{k} p^{k+1} (1-p)^{m-(k+1)}$$

$$= mp \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} p^k (1-p)^{m-1-k}$$

On la somme vaut 1, en effet c'est la somme de la loi $B(m-1, p)$.

Donc $E(X) = mp$.

Pour calculer $V(X)$, commençons par calculer $E(X(X-1))$ avec le théorème de transfert :

$$E(X(X-1)) = \sum_{k=0}^m k(k-1) \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k}$$

↙ (*)

$$= \sum_{k=2}^m m(m-1) \binom{m-1}{k-2} p^k (1-p)^{m-k}$$

↙ (*)

$$= \sum_{k=2}^m m(m-1) \binom{m-1}{k-2} p^k (1-p)^{m-k}$$

↙ changement d'indice : $k-2 = k$

$$= m(m-1) \sum_{k=0}^{m-2} \binom{m-1}{k} p^{k+2} (1-p)^{m-(k+2)}$$

↙ la somme de la loi $B(m-2, p)$.

$$= m(m-1)p^2 \times 1$$

Donc, par linéarité de E : $E(X^2) = E(X(X-1)) + E(X) = m(m-1)p^2 + mp$.

Donc d'après la formule de Hyppocrate : $V(X) = m(m-1)p^2 + mp - (mp)^2$

$$= -mp^2 + mp = mp(1-p).$$

Remarque : En notant, pour tout $i \in \{1, m\}$, X_i la variable aléatoire égale à

1 si la $i^{\text{ème}}$ expérience a été un succès et 0 sinon, alors $X_1 + \dots + X_m$ compte le nombre de succès obtenus donc $X_1 + \dots + X_m \subset B(m, p)$.

Comme $X_i \subset B(p)$, la linéarité de l'espérance donne $E(X_1 + \dots + X_m) = mp$.

2 - La loi géométrique.

Définition: On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$ si X est égale au rang d'obtention du premier succès lors d'une répétition successive d'expériences de Bernoulli identiques et indépendantes ayant pour probabilité de succès p . On note $X \in \mathcal{G}(p)$.

exemple: On lance une pièce équilibrée jusqu'à obtenir pile. Si on note X le nombre de lancers obtenus, $X \in \mathcal{G}(\frac{1}{2})$.

Proposition: Si $X \in \mathcal{G}(p)$, la loi de X est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = (1-p)^{k-1} p.$$

Preuve: Pour tout $i \geq 1$, notons $A_i =$ "la $i^{\text{ème}}$ exp. est un succès"

$$\text{Ainsi, pour tout } k \geq 2 \quad [X = k] = \bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{A_i} \cap A_k$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi par indépendance des lancers: } P(X = k) &= \prod_{i=1}^{k-1} P(\overline{A_i}) \cdot P(A_k) \\ &= \prod_{i=1}^{k-1} (1-p) \cdot p \\ &= (1-p)^{k-1} p \end{aligned}$$

les exp sont
toutes de succès p .

$$\text{et pour } k=1 \quad P(X=1) = P(A_1) = p = (1-p)^0 p.$$

Remarque: Si on est très rigoureux, à priori, dans la définition de X , le succès peut ne jamais se produire ! Calculons sa probabilité pour voir :

$$P(X = +\infty) = P\left(\overline{\bigcup_{k=1}^{+\infty} [X = k]}\right) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{k-1} p = 1 - p \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = 0.$$

Cette probabilité est (sans surprise) nulle. On voudrait donc que X ne vaille jamais la valeur $+\infty$ (peut-être possible, mais impossible!).

Proposition: Si $X \sim \mathcal{G}(p)$ alors X admet une espérance et une variance et :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} ; \quad V(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Preuve: X admet une espérance si $\sum_{k \geq 1} k (1-p)^{k-1} p$ converge absolument.

Comme on connaît une série géométrique dérivée convergente ($1-p \in]0,1[$), X a donc

$$\text{une espérance égale à : } \sum_{k=1}^{\infty} k (1-p)^{k-1} p = \frac{1}{(1-(1-p))^2} \cdot p = \frac{1}{p}.$$

théorème de transfert

$X(X-1)$ admet une espérance si $\sum_{k \geq 1} k(k-1) (1-p)^{k-2} p^2$ converge absolument.

Comme on connaît une série géométrique dérivée (d'ordre 2) convergente ($1-p \in]0,1[$),

$$\begin{aligned} X(X-1) \text{ a une espérance égale à : } \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) (1-p)^{k-2} p^2 &= p(1-p) \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) (1-p)^{k-2} \\ &= p(1-p) \cdot \frac{2}{(1-(1-p))^3} = \frac{2(1-p)}{p^2}. \end{aligned}$$

Ainsi X^2 a une espérance par linéarité de $\mathbb{E}$ égale à : $\mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p}.$

Donc X a une variance d'après la formule de Hyergens égale à :

$$V(X) = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} - \left(\frac{1}{p}\right)^2 = \frac{2(1-p) + p - 1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}.$$

Remarque: La loi géométrique est "sans mémoire", c'est-à-dire que :

$$\forall m, k \geq 1 \quad \mathbb{P}(X \geq m+k | X \geq m) = \mathbb{P}(X \geq k).$$

$$\begin{aligned} \text{En effet } \mathbb{P}(X \geq m+k | X \geq m) &= \frac{\mathbb{P}(X \geq m+k \cap X \geq m)}{\mathbb{P}(X \geq m)} = \frac{\mathbb{P}(X \geq m+k)}{\mathbb{P}(X \geq m)} = \frac{(1-p)^{m+k}}{(1-p)^m} = (1-p)^k. \end{aligned}$$

($\mathbb{P}(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$) *($\forall i \geq 1, \mathbb{P}(X \geq i) = \mathbb{P}(\text{les } i \text{ premières exp. sont des échecs}) = (1-p)^i$)*

3 - Le binôme de Newton.

Proposition: Pour tous réels a et b et tout entier $m \geq 0$,

$$(a+b)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} a^k b^{m-k} \quad (\text{Formule du Binôme de Newton}).$$

Preuve 1: Montrons l'égalité lorsque a et b sont strictement positifs.

Considérons la variable aléatoire $X \subset B(m, \frac{a}{a+b})$.

On sait bien que $\sum_{k=0}^m P(X=k) = 1$

$$\text{i.e.} \quad \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \left(\frac{a}{a+b}\right)^k \left(1 - \frac{a}{a+b}\right)^{m-k} = 1$$

$$\text{i.e.} \quad \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} a^k b^{m-k} \cdot \frac{1}{(a+b)^{k+m-k}} = 1$$

$$\text{i.e.} \quad \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} a^k b^{m-k} = (a+b)^m$$

Preuve 2: Par récurrence sur $m \in \mathbb{N}$.

Initialisation: $(a+b)^0 = 1$ et $\sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$.

Hérédité: Supposons $(a+b)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} a^k b^{m-k}$ pour un entier $m \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } (a+b)^{m+1} &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} a^k b^{m-k} (a+b) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} a^{k+1} b^{m-k} + \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} a^k b^{m+1-k} \\ &\stackrel{k=k-1 \text{ dans la 1}^{\text{ère}} \sum}{=} \sum_{k=1}^{m+1} \binom{m}{k-1} a^k b^{m-(k-1)} + \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} a^k b^{m+1-k} \\ &= \sum_{k=1}^m \binom{m}{k-1} a^k b^{m+1-k} + \binom{m}{m} a^{m+1} b^0 + \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} a^k b^{m+1-k} + \binom{m}{0} a^0 b^{m+1} \\ &\stackrel{\text{formule de Pascal}}{=} \sum_{k=1}^m [\binom{m}{k-1} + \binom{m}{k}] a^k b^{m+1-k} + a^{m+1} + b^{m+1} \\ &= \sum_{k=1}^m \binom{m+1}{k} a^k b^{m+1-k} + \underbrace{a^{m+1}}_{\text{pour } k=m+1} + \underbrace{b^{m+1}}_{\text{pour } k=0} \\ &= \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} a^k b^{m+1-k} \quad \text{La propriété est vraie au rang } m+1. \end{aligned}$$

Le principe de récurrence permet de conclure.

Preuve 3: $(a+b)^m = (a+b)(a+b)\dots(a+b)$

$$= \dots a^m + \dots a^{m-1}b + \dots a^{m-2}b^2 + \dots + \dots a b^{m-1} + \dots b^m$$
$$= \sum_{k=0}^m \dots a^k b^{m-k}$$

Le coefficient devant $a^k b^{m-k}$ est le nombre de façons de choisir la fois a parmi les m facteurs : $\binom{m}{k}$.

exemple: $(1+x)^4 = \binom{4}{1}x + \binom{4}{2}x^2 + \binom{4}{3}x^3 + \binom{4}{4}x^4$

$$= 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$$

Corollaire (Binôme matriciel): Soient $A, B \in M_p(\mathbb{R})$ deux matrices qui

commutent (c'est-à-dire que $AB=BA$), alors :

$$(A+B)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} A^k B^{m-k}.$$

exemple: Calculons M^m où $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $m \in \mathbb{N}$.

On écrit $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A + B$.

On vérifie que $AB=BA$, c'est le cas ici : $AB = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On calcule avant toute chose pour tout $k \in \mathbb{N}$:

• $A^k = \begin{pmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ car A est diagonale

• $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc pour tout $k \geq 2$ $B^k = 0$

Enfin : $M^m = (A+B)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} A^k B^{m-k}$ car $B^k = 0$ pour $k \geq 2$

$$= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} A^k B^{m-k}$$

$B^{m-k} = 0$ pour $m-k \geq 2$
 $\Rightarrow k \leq m-2$

$$= \binom{m}{m-1} A^{m-1} B^1 + \binom{m}{m} A^m B^0 = m A^{m-1} B + A^m.$$