

Lois uniformes et de Poisson

Définition (Loi certaine) :

On dit que X suit la loi certaine égale au réel $a \in \mathbb{R}$ lorsque $X(\Omega) = \{a\}$.

La loi de X est donc donnée par: $P(X=a) = 1$.

Ainsi, $E(X) = a$ et $V(X) = 0$.

Définition (Loi uniforme) :

On dit que X suit la loi uniforme sur $[a, b]$ où $a < b$ sont des entiers

lorsque : $X(\Omega) = [a, b]$ et, pour tout $k \in [a, b]$, $P(X=k) = \frac{1}{b-a+1}$.

On note $X \subset U([a, b])$.

Aspect de modélisation: Une variable de loi uniforme modélise une situation où toute les valeurs que prend X ont la même probabilité de se produire.

Par exemple, si X est égale au n° que donne un dé équilibré à 6 faces, $X \subset U([1, 6])$.

Proposition : Si $X \subset U([a, b])$ alors $X - a + 1 \subset U([1, b-a+1])$.

Preuve : Comme $X(\Omega) = [a, b]$, $(X-a+1)(\Omega) = [a-a+1, b-a+1] = [1, b-a+1]$

Pour tout $k \in [1, b-a+1]$, $P(X-a+1=k) = P(X=\underbrace{k+a-1}_{\in [a, b]}) = \frac{1}{b-a+1} = \frac{1}{b-a+1-1+1}$.

Donc $X-a+1 \subset U([1, b-a+1])$.

Propriétés: Soit $m \in \mathbb{N}^*$, $a < b$ des entiers.

Si $X \subset U(\llbracket 1, m \rrbracket)$ alors $E(X) = \frac{m+1}{2}$ et $V(X) = \frac{m^2-1}{12}$.

Si $X \subset U(\llbracket a, b \rrbracket)$ alors $E(X) = \frac{a+b}{2}$ et $V(X) = \frac{(b-a+1)^2-1}{12}$.

Preuve: Notons que X a une espérance et une variance car $X(1)$ est fini.

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Si } X \subset U(\llbracket 1, m \rrbracket) \quad E(X) &= \sum_{k=1}^m k \cdot P(X=k) = \sum_{k=1}^m k \cdot \frac{1}{m+1} \\ &= \frac{m(m+1)}{2m} = \frac{m+1}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Pour calculer } V(X), \text{ calculons } E(X^2) &= \sum_{k=1}^m k^2 P(X=k) \text{ par transfert} \\ &= \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} \cdot \frac{1}{m}. \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, d'après Huygens : } V(X) = \frac{(m+1)(2m+1)}{6} - \left(\frac{m+1}{2}\right)^2 = \frac{4m^2+6m+2-3m^2-6m-3}{12} = \frac{m^2-1}{12}.$$

• Si $X \subset U(\llbracket a, b \rrbracket)$, comme $X-a+1 \subset U(\llbracket 1, b-a+1 \rrbracket)$

$$\text{alors } E(X-a+1) = \frac{b-a+1+1}{2} \text{ et } V(X-a+1) = \frac{(b-a+1)^2-1}{12}.$$

d'où par linéarité de E : $E(X) = E(X-a+1+a-1)$

$$\stackrel{6}{=} \frac{b-a+2}{2} + a-1 = \frac{b+a}{2}.$$

$$\text{et par propriété de } V: V(X) = V(X-a+1) = \frac{(b-a+1)^2-1}{12}.$$

Python: `nd.randomint(a, b+1)` renvoie un entier de $\llbracket a, b \rrbracket$ aléatoirement de manière uniforme, en d'autres termes, cette commande renvoie une simulation d'une variable aléatoire de loi $U(\llbracket a, b \rrbracket)$.

exemple: Quelle valeur va afficher (à peu près) le script suivant ?

$$S = 0$$

for k in range(1000):

$S_+ = \text{nd.n randint}(0, b)$:

print(S/N)

exemple 1 : On dispose d'un trousseau de clés ($m \in \mathbb{N}^*$) dont une seule ouvre la porte située en face de nous. On les essaie une à une pour trouver la bonne (on met de côté chaque clé après chaque essai). On note X le nombre d'essais nécessaires pour trouver la bonne clé. On pose, pour $i \in \mathbb{N}^*$, $A_i =$ "la $i^{\text{ème}}$ clé essayée est la bonne".

• Calculons la loi de X . Visiblement, $X(\Omega) = \llbracket 1, m \rrbracket$, pour tout $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$:

$$\begin{aligned} P(X=k) &= P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k) = \prod_{i=1}^{k-1} \underbrace{P(\overline{A_i})}_{\substack{\text{nombre de mauvaises clés après} \\ i-1 \text{ essais}}} \cdot \underbrace{P(A_k)}_{\substack{\text{bonne clé} \\ \text{composées}}} \quad \text{par la formule des probabilités composées} \\ &= \prod_{i=1}^{k-1} \frac{\overbrace{m-i}^{\text{nombre de mauvaises clés après } i-1 \text{ essais}}}{\underbrace{m-(i-1)}_{\substack{\text{nombre de clés total} \\ \text{après } i-1 \text{ essais}}}} \cdot \frac{1}{m-(k-1)} = \frac{m-(k-1)}{m-(k-1)} \cdot \frac{1}{m-(k-1)} = \frac{1}{m} \end{aligned}$$

(le dénominateur du produit se simplifie)

Ainsi, on reconnaît la loi d'une $\mathcal{U}(\llbracket 1, m \rrbracket)$, d'où $X \in \mathcal{U}(\llbracket 1, m \rrbracket)$.

Autre rédaction possible (moins rigoureuse) : $P(X=k) = \frac{\overbrace{m-1}^{\text{mauvaise clé}}}{m} \times \frac{\overbrace{m-2}^{\text{mauvaise clé}}}{m-1} \times \dots \times \frac{\overbrace{m-(k-1)}^{\text{mauvaise clé}}}{m-(k-2)} \times \frac{\overbrace{1}^{\text{bonne clé}}}{m-(k-1)}$

$$= \frac{1}{m}.$$

• Autre preuve : Notons, pour tout $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$ et tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ la variable $X_{i,k}$ égale à 1 si on a la clé $m^{\circ} i$ au $k^{\text{ème}}$ essai.

Les clés étant indistinguables, les variables $X_{1,k}, X_{2,k}, \dots, X_{m,k}$ ont la même loi.

Donc $P(X_{1,k}=1) = \dots = P(X_{m,k}=1)$. On la faulte ($X_{i,k}=1$) 1 ≤ i ≤ m

forme un système complet d'événement, donc :

$$\sum_{i=1}^m \underbrace{P(X_{i,k}=1)}_{\text{tous égaux}} = 1, \text{ d'où } m P(X_{1,k}=1) = 1.$$

Définition: On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre λ ($\lambda \in]0, +\infty[$) si la loi de X est donnée par:
 $\forall k \in \mathbb{N}, P(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$. On note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Remarque: On a bien $\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot \underbrace{e^{\lambda}}_{\text{série exponentielle}} = e^0 = 1$.

Proposition: Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, X a une espérance et une variance et:
 $E(X) = V(X) = \lambda$.

Preuve: X a une espérance si $\sum_{k \geq 0} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ converge absolument. / le terme $k=0$ est nul
 si $\sum_{k \geq 1} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{(k-1)!}$ converge / $k-1 = l$
 si $\sum_{k \geq 0} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k+1}}{k!}$ converge

On reconnaît une série exponentielle convergente, de somme: $e^{-\lambda} \lambda \cdot e^{\lambda} = \lambda$.

$X(X-1)$ a une espérance ^{théorème de transfert} si $\sum_{k \geq 0} k(k-1) e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ converge absolument, / termes $k=0, 1$ sont nuls
 si $\sum_{k \geq 2} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{(k-2)!}$ converge
 si $\sum_{k \geq 0} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k+2}}{k!}$ converge.

On reconnaît une série géométrique convergente, de somme $e^{-\lambda} \lambda^2 e^{\lambda} = \lambda^2$.

Ainsi, par linéarité de E , $E(X^2) = E(X(X-1)) + E(X) = \lambda^2 + \lambda$.

Donc d'après la formule de Huygens: $V(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$.

Remarque culturelle : La loi de Poisson permet de modéliser la survenue d'événements rares dans une grande population, par exemple on peut modéliser le nombre d'accidents mortels à cheval en France en une année par une loi $P(7)$.

Cela s'explique par le fait que, si n est "grand" la loi $B(n, \frac{\lambda}{n})$ est très proche de la loi $P(\lambda)$. Nous le prouverons en exercice et vous le reverrez en deuxième année.