Mathématiques 1 Approfondies 2024 : Un corrigé proposé par G. Brignon

1 – . Soit $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$ $\quad ({}^tPP)_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}({}^tP)_{i,k}P_{k,j}=\sum_{k=1}^{n}\delta_{k,\sigma(i)}\delta_{k,\sigma(j)}$

Comme σ est bijective : $\sigma(i)=\sigma(j)$ ssi $i=j$ d'où :

$$\left.\begin{array}{l}\cdot \text{ si } i=j \quad ({}^tPP)_{i,i}=\delta_{\sigma(i),\sigma(i)}\cdot\delta_{\sigma(i),\sigma(i)}=1\\ \cdot \text{ si } i\neq j \quad ({}^tPP)_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}0=0\end{array}\right]\ \begin{array}{l}{}^tPP=I_n.\\ \text{i.e. } P\in O_n(\mathbb{R})\end{array}$$

. $({}^tP)_{i,j}=P_{j,i}=\delta_{j,\sigma(i)}=\begin{cases}1 \text{ si } j=\sigma(i) \text{ i.e } i=\sigma^{-1}(j)\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}=\delta_{\sigma^{-1}(j),i}$

Ainsi ${}^tP$ est la matrice associée à la permutation σ^{-1}.

2 – . Bien sûr, $Q_{ij}^2=1 \iff Q$ a ses coefficients égaux à 1 ou -1

. ${}^tQQ=n\,I_n \iff \forall i\in[\![1,n]\!]\ ({}^tQQ)_{i,i}=n$ et $\forall i\neq j\ ({}^tQQ)_{i,j}=0$

Or $({}^tQQ)_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}Q_{k,i}Q_{k,j}=\langle Q_i,Q_j\rangle$ où Q_i est la $i^{\text{ème}}$ colonne de Q.

De plus $({}^tQQ)_{i,i}=\sum_{i=1}^{n}Q_{k,i}^2=n$ lorsque $Q_{k,i}^2=1$.

3 – H est de Hadamard donc ${}^tHH=n\,I_n$ i.e. ${}^tH\left(\frac{1}{n}H\right)=I_n$

d'où ${}^t({}^tH){}^tH=H\,{}^tH=n\left(\frac{1}{n}H\right){}^tH=n\,({}^tH)^{-1}\,{}^tH=n\,I_n$.

de plus la seconde condition de l'équivalence de 2 est évidente :

${}^tH$ est donc aussi de Hadamard d'après Q2.

4 – . Le produit à droite (resp. à gauche) par D, matrice diagonale ne comportant que des -1 ou 1, multiplie les colonnes (resp. les lignes) de H par -1 ou 1 donc les coefficients valent encore -1 ou 1

De plus $\,^t(DH)DH = {}^tH\,{}^tDDH = {}^tHD^2H = {}^tH I_n H = H$ $\quad \underset{D = \mathrm{diag}(\pm1,\dots,\pm1)}{\overset{D \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \subset S_n(\mathbb{R})}{}}$

de même pour HD donc d'après 2 : DH et HD sont de Hadamard.

- Le produit par la matrice de permutation P échange l'ordre des coefficients* de H donc les coefficients de H sont toujours des -1 ou 1, de plus $\,^t(PH)PH = {}^tH\,{}^tPPH = nI_n$ d'après 1 $\;({}^tPP = I_n)$

de même pour HP, donc PH et HP sont de Hadamard.

$*$: $(PH)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,\sigma(k)} H_{k,j} = H_{\sigma(k),j} = \pm 1.$

5_ Écrivons $H = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \dots & \varepsilon_n \\ & * \end{pmatrix}$ où $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$. Posons $D = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$

on a donc $HD = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^2 \dots & \varepsilon_n^2 \\ & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \dots & 1 \\ & * \end{pmatrix}$ de Hadamard d'après 4.

6_ Soit Q de Hadamard de 1ère ligne $(1 \dots 1)$. La ligne 1 est $\perp$ à la ligne 2 :

$\sum_{i=1}^{n} 1 \times Q_{2,i} = 0$. Notons d le nombre de 1 présents sur la ligne 2. Ainsi :

$\sum_{i=1}^{n} Q_{2,i} = d\times 1 + (n-d)(-1)$, d'où $n - 2d = 0$ ie $n = 2d$: n est pair.

7_ $\sum_{k=1}^{n} (S_{ik}+1)(S_{mk}+1) = \sum_{k=1}^{n} S_{ik}S_{mk} + S_{ik} + S_{mk} + 1$

Or $\sum_{k=1}^{n} S_{ik}S_{mk}$ = produit scalaire entre les lignes i et m de S, donc entre les colonnes i et m de ${}^tS$,

qui est aussi de Hadamard (5.) donc cela vaut 0 $(i \neq m)$

de même $\sum_{k=1}^{n} S_{ik} = \sum_{k=1}^{n} S_{ik} \times 1$ = produit scalaire entre colonnes i et 1 de ${}^tS$, donc nul

car $i \neq 1$. Idem pour $\sum_{k=1}^{n} S_{mk}$.

Ainsi $\sum_{k=1}^{n} (S_{ik}+1)(S_{mk}+1) = 0 + 0 + 0 + \sum_{k=1}^{n} 1 = n.$

8_ Si $n > 2$, comme $S_{ij} = \pm 1$, le produit $(S_{ik}+1)(S_{mk}+1)$ est soit nul soit égal à 4.

Donc n est une somme de 0 et de 4 : n est multiple de 4.

9_ Une colonne de S a ses 3 premières lignes de la forme $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ car la $1^{ère}$ ligne contient des 1 et les autres ± 1. Il suffit simplement de permuter l'ordre des colonnes pour les ranger dans l'ordre voulu, cela est possible par le produit par P_σ où σ est la permutation voulue. La matrice obtenue est de Hadamard d'après 4.

10_ Par orthogonalité des lignes 1 et 2, il y a autant de 1 que de -1 dans la ligne 2, donc la taille des 2 premiers blocs est égale à celle des 2 derniers.

Par orthogonalité des lignes 2 et 3, il y a autant de 1 que de -1 dans les blocs de la ligne 3.

Ainsi les 4 blocs ont même taille.

Donc $n =$ taille des 4 blocs $= 4p$ où p est la taille d'un bloc.

11_ . $A \otimes B$ a encore ses coefficients égaux à ± 1 car A et B sont de Hadamard.

. On a $A \otimes B = \begin{bmatrix} A_{11}(b_1 \dots b_k) \dots\dots & A_{1m}(b_1 \dots b_k) \\ A_{2m}(b_1 \dots b_k) \dots\dots & A_{2m}(b_1 \dots b_k) \\ \vdots & \\ A_{m1}(b_1 \dots b_k) \dots\dots & A_{mm}(b_1 \dots b_k) \end{bmatrix}$ où $b_1, \dots, b_k$ sont les colonnes de B

Le produit scalaire entre deux colonnes de $A \otimes B$ vaut donc :

$$< \begin{pmatrix} A_{1i} b_p \\ A_{2i} b_p \\ \vdots \\ A_{mi} b_p \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} A_{1j} b_q \\ A_{2j} b_q \\ \vdots \\ A_{mj} b_q \end{pmatrix} > = \sum_{k=1}^{m} A_{ki} . A_{kj} < b_p, b_q >$$

où i, j, p, q sont des entiers.

Ainsi lorsque $p \neq q$, c'est nul par $\perp$ des colonnes de B.

lorsque $b=q$, il reste $\sum_{k=1}^{n} A_{ki} A_{kj} \times n \Rightarrow$ par $\perp$ des colonnes de A.

Ainsi $A \otimes B$ est de Hadamard d'après 2.

12_ $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ est de Hadamard donc $A \otimes A \in M_{2^2}(\mathbb{R})$ aussi, donc on définit par récurrence la suite (A_m) où $\begin{cases} A_0 = A \\ A_{m+1} = A \otimes A_m \end{cases}$

Ainsi A_m est de Hadamard et $A_m \in M_{2^m}(\mathbb{R})$.

13_ Dans l'ordre, on complète :

- n != p • n • p • M[i,j]**2 • n-1 • j+1
- transpose(M[:,k]), M[:,j]) # produit scalaire colonne k et j

14_ Dans l'ordre, on complète :

- i in range(1, n) # la ligne 1 est fixée à (1,…,1)
- and 2*(j-nb_un) < n # j est le nombre d'étapes sur la ligne i
- nb_un += val # 1 chance sur 1 de valoir 1 ou -1.
- j = j+1
- matpm[i,k] = -1 # si on a ~~mis~~ n 1, les autres valent -1.
- return matpm

15_ • $\langle x, x\rangle = \sum_{k=1}^{n} p_k x_k^2 \geq 0$ car $p_k \geq 0$. $\quad \underset{\longrightarrow}{p_k > 0}$ car $p_k = P(\{p_k\}) \neq 0$ $\quad \{p_k\} \neq \emptyset$

Cette somme est nulle ssi : $\forall k \in [\![1, n]\!]$ $p_k x_k^2 = 0$ i.e. $\forall k$ $x_k = 0$ i.e $x = 0$.

• Les autres points sont immédiats (à rédiger le jour J bien sûr)

16_ $E(a_i Z_i + b_i) = 0$ et $V(a_i Z_i + b_i) = 1 \iff \begin{cases} a_i E(Z_i) + b_i = 0 \\ a_i^2 V(Z_i) = 1 \end{cases}$

Or $\#Z_i(\Omega) \geq 2$ et $P(Z_i = x_k) \neq 0$ $\forall x_k \in Z_i(\Omega)$ vu que $[Z_i = x_k] \neq \emptyset$.

donc Z_i n'est pas de loi certaine donc $V(Z_i) > 0$.

Ainsi notre système équivaut (comme $a_i \geq 0$) à : $\begin{cases} b_i = -\frac{E(Z_i)}{\sigma_{Z_i}} \\ a_i = 1/\sigma_{Z_i} \end{cases}$

17_ • $\langle v, u\rangle = \sum_{k=1}^{n} v_k \times 1 \times p_k = \sum_{k=1}^{n} V(w_k) P(\{w_k\}) = E(V)$

<u>Remarque</u>: Cette "formule" est mal connue en EC. On peut la comprendre comme cela : $V = \sum_{k=1}^{n} V(w_k) \times \mathbb{1}_{\{w_k\}}$, car $\sum_{k=1}^{n} V(w_k) \mathbb{1}_{\{w_k\}}(w_i) = V(w_i)$.

et $E(\mathbb{1}_{\{w_k\}}) = P(\{w_k\})$ car $\mathbb{1}_{\{w_k\}} \hookrightarrow \mathcal{B}(P(w_k))$.

• $\langle v, w\rangle = \sum_{k=1}^{n} V(w_k) W(w_k) P(\{w_k\}) = \sum_{k=1}^{n} (VW)(w_k) P(\{w_k\}) = E(VW)$

d'après la même formule appliquée à VW.

18_ • $E(X_i) = 0$ par définition de X_i et $E(X_i) = \langle x_i, u\rangle$ d'après 17.

• $\langle x_i, x_i\rangle = E(X_i^2) = V(X_i) + E(X_i)^2 \overset{=}{} V(X_i) = 1$ par définition de X_i

• $\langle x_i, x_j\rangle = E(X_i X_j) = E(X_i) E(X_j) = 0$ car $X_i \perp\!\!\!\perp X_j$ par conditions.

19_ • L'énoncé donne $l \geq 2$.

• D'après 18 $(x_1, \dots, x_l, u)$ est orthogonale et ses vecteurs sont non nuls donc elle est libre dans $\mathbb{R}^m$ donc $\mathrm{Card}(x_1,\dots,x_\ell,u) = \ell+1 \leq m$.

2 – (a) Les formes linéaires $l_1 : (x_1,\dots,x_m) \longmapsto \sum_{\ell=1}^{m} P(Z=\alpha_\ell)\, x_\ell$

$l_2 : (x_1,\dots,x_m) \longmapsto \sum_{\ell=1}^{m} P(Z=\alpha_\ell)\alpha_\ell\, x_\ell$

sont des formes linéaires non nulles ($l_1 \neq 0$ car les $P(Z=\alpha_\ell) \neq 0$ et $l_2 \neq 0$ car au moins 1 $\alpha_\ell \neq 0$ vu que $\# Z(\Omega) > 2$ – en fait au moins 2) sur $\mathbb{R}^m$.

Ainsi $\ker l_1$ et $\ker l_2$ sont des hyperplans i.e. des sev de dimension $m-1$.

Donc $\dim(\ker l_1 \cap \ker l_2) \overset{*}{\geq} m-2 \geq 1$ donc il existe $(\beta_1,\dots,\beta_\ell) \neq (0,\dots,0)$ dans $\ker l_1 \cap \ker l_2$ i.e. vérifiant les deux égalités voulues.

*: je sors du programme, je m'en excuse !

(b). La linéarité est claire par linéarité des évaluations $(\alpha_i \longmapsto Q(\alpha_i))_{1\leq i\leq m}$

. L'injectivité vient du fait que si $T(Q)=0$, Q a m racines, or $\deg Q < m$ donc $Q=0$.

. Comme $\dim \mathbb{R}_{m-1}[x] = m = \dim \mathbb{R}^m$: Q est un isomorphisme.

(c) Prenons Q l'antécédent de $(\beta_1,\dots,\beta_m) \in \mathbb{R}^m$ par l'application bijective T. Ainsi :

- $E(Q(Z)) = \sum_{\ell=1}^{m} P(Z=\alpha_\ell)\, Q(\alpha_\ell) = \sum_{\ell=1}^{m} P(Z=\alpha_\ell)\beta_\ell = 0$
- $E(Q(Z)Z) = \sum_{\ell=1}^{m} P(Z=\alpha_\ell) Q(\alpha_\ell)\alpha_\ell = 0$

d'après le théorème de transfert

- $Q(Z)(\Omega) = \{Q(\alpha_i)\}_{1\leq i\leq m} \neq \{0\}$ car $(Q(\alpha_1),\dots,Q(\alpha_m)) = (\beta_1,\dots,\beta_m) \neq (0,\dots,0)$.

21 – Soient $X_{i_1}, \dots, X_{i_r}$ les X_i vérifiant $\# X_i(\Omega) > 2$.

Ils vérifient les hypothèses de la 20. Notons alors $Q_{i_1}, \dots, Q_{i_r} \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ des polynômes vérifiant $E(Q_{i_j}(X_{i_j})) = 0$; $E(Q_{i_j}(X_{i_j})\, X_{i_j}) = 0$ et $Q(X_{i_j})(\Omega) \neq \{0\}$.

On va prouver que la famille $(u_0, x_1, \dots, x_\ell, Q_{i_1}(x_{i_1}), \dots, Q_{i_r}(x_{i_r}))$ est orthogonale. On a :

- $\langle u_0, x_i \rangle = 0$ et $\langle x_i, x_j \rangle = 0$ d'après 18 $\forall i$ et $\forall j \neq i$
- $\langle u_0, Q_{i_j}(x_{i_j}) \rangle = E(Q_{i_j}(X_{i_j})) = 0$ d'après 17 et par définition de Q_{i_j}.
- $\langle x_{i_j}, Q_{i_j}(x_{i_j}) \rangle = E(X_{i_j} Q_{i_j}(X_{i_j})) = 0$ par définition de Q_{i_j}
- $\forall k \neq i_j$: $\langle x_k, Q_{i_j}(x_{i_j}) \rangle = E(X_k Q_{i_j}(X_{i_j}))$; $Q_{i_j} = \sum q_k^{ij} x^k \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} q_j^{ij} E(X_k X_{i_j}^{\,j})$$

$$= 0$$ par $\perp\!\!\!\perp$ de X_k et $X_{i_j}^{\,j}$ et vu que $E(X_k) = 0$.

- $\forall i_{j'} \neq i_j$ $\langle Q_{i_{j'}}(x_{i_{j'}}), Q_{i_j}(x_{i_j}) \rangle = E(Q_{i_{j'}}(X_{i_{j'}}) Q_{i_j}(X_{i_j}))$

par coalitions, on a l'indép de $Q_{i_{j'}}(X_{i_{j'}})$ et $Q_{i_j}(X_{i_j})$ $\;= E(Q_{i_{j'}}(X_{i_{j'}})) \times E(Q_{i_j}(X_{i_j}))$

$$= 0 \times 0 = 0.$$

Ainsi $(u_0, x_1, \dots, x_\ell, Q_{i_1}(x_{i_1}), \dots, Q_{i_r}(x_{i_r}))$ est orthogonale et composée de $1 + \ell + r$ vecteurs non nuls ($u_0 \neq 0$, $x_i \neq 0$, et $Q_{i_j}(x_{i_j}) \neq 0$ car $Q_{i_j}(X_{i_j})(\Omega) \neq \{0\}$) donc elle est libre dans $\mathbb{R}^n$: donc $1 + \ell + r \leq n$

c-à-d : $\ell + r \leq n - 1$

Remarque : Cette question me paraît trop difficile. Si vous trouvez une preuve plus simple, je suis preneur.

(b) $r \geq l$ et $l + r \leq n-1$ donc $2r \geq n-1$ donc $r \geq \frac{n-1}{2}$.

22_ (a) Comme $l = n-1$, $r = 0$ d'après 21 (a).

(b) On a $E(X_i) = 0$ i.e. $\alpha_i \theta_i + \beta_i (1-\theta_i) = 0$

$V(X_i) = 1$ i.e $E(X_i^2) = 1$ i.e. $\alpha_i^2 \theta_i + \beta_i^2 (1-\theta_i) = 1$

On résoud $\begin{cases} \alpha_i \theta_i + \beta_i (1-\theta_i) = 0 \\ \alpha_i^2 \theta_i + \beta_i^2 (1-\theta_i) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta_i = -\frac{\alpha_i \theta_i}{1-\theta_i} \\ \alpha_i^2 \theta_i + \left(\frac{\alpha_i \theta_i}{1-\theta_i}\right)^2 (1-\theta_i) = 1 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \beta_i = -\frac{\alpha_i \theta_i}{1-\theta_i} \\ \alpha_i^2 \left(\theta_i + \frac{\theta_i}{1-\theta_i}\right) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta_i = \dots\dots = -\frac{1}{\alpha_i} \\ \alpha_i = \sqrt{\frac{1-\theta_i}{\theta_i}} \end{cases}$ (calculs sans intérêt)

car $\alpha_i > 0$, en effet $\alpha_i > \beta_i$ et X_i a une espérance nulle et n'est pas constante donc elle a nécessairement au moins une valeur > 0 et une valeur < 0.

(c) Comme $D = \mathrm{diag}(\sqrt{p_i})_{1 \leq i \leq n}$. $MD = \begin{pmatrix} \sqrt{p_1} X_1(\omega_1) & \dots & \sqrt{p_n} X_1(\omega_n) \\ \vdots & \dots\dots & \vdots \\ \sqrt{p_1} & \dots\dots & \sqrt{p_n} \end{pmatrix}$

Ainsi le produit scalaire entre les lignes i et j de MD vaut (pour $i,j \neq n$)

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{p_l} X_i(\omega_l) \sqrt{p_l} X_j(\omega_l) = \sum_{l=1}^{n} p_l (X_i X_j)(\omega_k) = \begin{cases} E(X_i^2) = V(X_i) = 1 \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

si $j = n$ et $i \in [\![1, n-1]\!]$: $\sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{p_l} X_i(\omega_l) \sqrt{p_l} = = E(X_i) = 0$.

si $j = i = n$: $\sum_{l=1}^{n} \sqrt{p_l} \sqrt{p_l} = 1$.

Ainsi les lignes de MD forment une famille orthonormale donc les colonnes de ${}^t(MD)$ forment une famille orthonormale i.e. ${}^t(MD) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

Donc MD est orthogonale.

(d) Comme MD est orthogonale, la colonne $i \in [\![1,n]\!]$ est de norme 1 :

donc $\displaystyle\sum_{l=1}^{n-1} \left(\sqrt{p_i}\, X_l(w_i)\right)^2 + \left(\sqrt{p_i}\right)^2 = 1$

i.e $\displaystyle\sum_{l=1}^{n-1} X_l^2(w_i)\, p_i + p_i = 1$

i.e. $\displaystyle\left(1 + \sum_{l=1}^{n-1} X_l^2\right)(w_i) = \frac{1}{p_i}$ égalité valable pour tout $w_i \in \Omega$.

Donc $\displaystyle Y = 1 + \sum_{l=1}^{n-1} X_l^2$.

(e) Ainsi, pour $i \in [\![1,n-1]\!]$: $\displaystyle YX_i = X_i + \sum_{l=1}^{n-1} X_l^2 X_i$

donc $\displaystyle X_i^3 = YX_i - X_i - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{n-1} X_l^2 X_i$

donc $E(X_i^3) = E(YX_i) - E(X_i) - \sum E(X_l^2)E(X_i)$ par indép de X_l et X_i

$\underset{E(X_i)=0}{=} \displaystyle E(YX_i) = \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{p_l} \cdot p_l\, X_i(w_l) = \sum_{l=1}^{n} X_i(w_l)$

(f) On a $E(X_i^3) = \alpha_i^3 P(X=\alpha_i) + \beta_i^3 P(X=\beta_i)$ par transfert

$\underset{22b)}{=} \displaystyle \alpha_i^3 \theta_i - \frac{1}{\alpha_i^3}(1-\theta_i)$

et $\displaystyle\sum_{l=1}^{n} X_i(w_l) = m_i \alpha_i + (n-m_i)\beta_i$ car $X_i(\Omega) = \{\alpha_i, \beta_i\}$ et par déf de m_i

Donc $\displaystyle \alpha_i^3\theta_i - \frac{1-\theta_i}{\alpha_i^3} = m_i\alpha_i + (n-m_i)\left(\frac{-1}{\alpha_i}\right)$

donc $\displaystyle \alpha_i^6\theta_i - (1-\theta_i) = m_i\alpha_i^4 - \alpha_i^3(n-m_i)$ et comme $\alpha_i = \sqrt{\frac{1-\theta_i}{\theta_i}}$

donc $\displaystyle \left(\frac{1-\theta_i}{\theta_i}\right)^3\theta_i - (1-\theta_i) = m_i\left(\frac{1-\theta_i}{\theta_i}\right)^2 - \left(\frac{1-\theta_i}{\theta_i}\right)^{3/2}(n-m_i)$

Cela donne $\displaystyle m_i = \left(\frac{(1-\theta_i)^3}{\theta_i^2} - (1-\theta_i) + \left(\frac{1-\theta_i}{\theta_i}\right)^{3/2} n\right) \Big/ \left(\left(\frac{1-\theta_i}{\theta_i}\right)^2 + \left(\frac{1-\theta_i}{\theta_i}\right)^{3/2}\right)$

Après calculs on obtient $m_i = \theta_i(n-2)+1$, ce qui équivaut à $\theta_i = \frac{m_i - 1}{n-2}$.

Enfin on injecte θ_i dans $\alpha_i = \sqrt{\frac{1-\theta_i}{\theta_i}}$, après simplification on $\alpha_i = \sqrt{\frac{n-m_i-1}{m_i-1}}$

(A2) Si $n=3$, on a $\theta_i = m_i - 1 \in \mathbb{N}$: impossible car $\theta_i \in]0,1[$. Donc $n \geq 4$.

(A3) On a déjà $m_i - 1 \neq 0$ et comme $\theta_i \neq 1$, $m_i - 1 < n-2$ ie $m_i \leq n-2$.

(g) (a) On a $P(X_i = \alpha_i) = \theta_i$, or $P(X_i=\alpha_i) = \sum_{k / X_i(\omega_k)=\alpha_i} \overbrace{P(\omega_k)}^{=1/n} = m_i \times \frac{1}{n}$

Ainsi $\theta_i = \frac{m_i}{n}$, donc d'après (f) :

$$\frac{m_i - 1}{n-2} = \frac{m_i}{n} \text{ donc } (m_i - 1)n = (n-2)m_i \text{ donc } m_i = \frac{n}{2}.$$

Ainsi, comme $m_i \in \mathbb{N}$, n est pair et $\theta_i = \frac{n/2}{n} = \frac{1}{2}$.

(b) Donc d'après 2.2 (b) $\alpha_i = \sqrt{\frac{1-1/2}{1/2}} = 1$ et $\beta_i = -\frac{1}{\alpha_i} = -1$.

Ainsi M est à coefficient dans $\{-1,1\}$ et on sait que $MD \in O_n(\mathbb{R})$.

Or $D = \frac{1}{\sqrt{n}} I_n$ donc $\left(M \frac{1}{\sqrt{n}} I_n\right)\left({}^tM \frac{1}{\sqrt{n}} I_n\right) = I_n$

$$\text{i.e} \quad M\,{}^tM = n I_n$$

donc M est de Hadamard d'après la Q. 2.

<u>Remarque</u> : On a donc prouvé dans cette partie que :

s'il existe $(Z_i)_{1\leq i \leq n-1}$ $n-1$ variables aléatoires définies sur $(\Omega, P(\Omega), P)$

(où $\Omega = [\![1,n]\!]$ et P est la probabilité uniforme) 2 à 2 indépendantes et $\# Z_i(\Omega) \geq 2$.

alors il existe une matrice de Hadamard dans $M_n(\mathbb{R})$.

On ne sait toujours pas s'il existe pour tout n : problème de recherche ouvert !

23_ La linéarité de φ est claire et :

$$\|\varphi(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{(i-1)n+j}^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 + \sum_{j=1}^{n} x_{n+j}^2 + \dots + \sum_{j=1}^{n} x_{n(n-1)+j}^2 = \sum_{i=1}^{n^2} x_i^2 = \|x\|^2$$

24_ $$\mathrm{Tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^{n} ({}^tAA)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ji}A_{ji} = \|A\|^2.$$

25_ • $$F(A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |A_{ij}| = \langle A, (1)_{1\le i,j\le n} \rangle \underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\le} \|A\| . \|(1)\| = \Big(\sum_{i,j} A_{ij}^2\Big)^{1/2} \sqrt{n^2}.$$

• On a $\Big(\sum_{i,j} |A_{ij}|\Big)^2 = \sum_{i,j} A_{ij}^2 + \sum_{(i,j)\neq(i',j')} |A_{ij}||A_{i'j'}| \geq \sum_{i,j} A_{ij}^2$

donc $F(A) \geq \Big(\sum_{i,j} A_{ij}^2\Big)^{1/2}$ par croissance de $t \mapsto t^{1/2}$.

26_ • Soit $x \in H_n$. $\|x\|^2 = \|\varphi(x)\|^2 = \mathrm{Tr}({}^t\varphi(x)\varphi(x)) = \mathrm{Tr}(I_n) = n$.

donc H_n est borné ($H_n \subset \overline{B}(0,\sqrt{n})$).

• $\varphi(x) \in O_n \iff {}^t\varphi(x)\varphi(x) = I_n \iff \begin{cases} \sum x_i x_j = 0 \\ \sum x_i^2 = 1 \end{cases}$ on a n^2 égalités de formes quadratiques

Ainsi, par continuité des formes quadratiques, H_n est fermé.

27_ $|F(\varphi(x)) - F(\varphi(y))| = \Big|\sum_{i=1}^{n^2} |x_i| - \sum_{i=1}^{n^2} |y_i|\Big| = \Big|\sum_{i=1}^{n^2} |x_i| - |y_i|\Big|$ inégalité triangulaire

$\leq \sum_{i=1}^{n^2} \big||x_i| - |y_i|\big|$ idem *

$\leq \sum_{i=1}^{n^2} |x_i - y_i|$

$= F(x-y)$ Q.25

$\leq n\|x-y\|^2$

* : on a : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$\big||x| - |y|\big| \leq |x+y| \leq |x| + |y|$

La partie de gauche est moins connue mais c'est du cours !

28_ $\inf_{A \in O_n} F(A) = \inf_{x \in H_n} F(\varphi(x))$. Or $F\circ\varphi$ est continue d'après 27 par théorème d'encadrement. Donc $F\circ\varphi$ a un minimum global sur H_n, qui est fermé borné. De même pour le maximum.

29 – Si $Q \in \mathcal{O}_n$, $F(Q) \underset{Q.25}{\geq} \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} Q_{ij}^2\right)^{1/2} = \sum (1)^{1/2} = n$

les colonnes de Q sont de norme 1.

Donc $M_n^- \geq n$ et $F(I_n) = n$ donc $M_n^- = n$ (car $I_n \in \mathcal{O}_n$).

30 – $F(Q) = n \iff \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |Q_{ij}| = n$ c

Or, comme $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ $\sum_{j=1}^{n} Q_{ij}^2 = 1$ donc $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} Q_{ij}^2 = n$

d'où $F(Q) = n \iff \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |Q_{ij}| - Q_{ij}^2 = 0$

or $|Q_{ij}| \leq 1$ donc $|Q_{ij}| - Q_{ij}^2 \geq 0$ donc :

$\forall i,j$ $|Q_{ij}| - Q_{ij}^2 = 0$ ie $Q_{ij} \in \{0, -1, 1\}$.

or $\sum |Q_{ij}| = 1$ donc ce sont les matrices possédant un seul 1

sur chaque ligne et chaque colonne et des 0 ailleurs : les matrices de permutation.

31 – $\|Q - \frac{1}{\sqrt{n}} S(Q)\|^2 = \|Q\|^2 - \frac{2}{\sqrt{n}} \langle Q, S(Q) \rangle + \frac{1}{n} \|S(Q)\|^2$

Or, on sait que : • $\|Q\|^2 = n$ car $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

• $\|S(Q)\|^2 = \sum_{i,j} (\pm 1)^2 = n^2$.

• $\langle Q, S(Q) \rangle = \sum_{i,j} Q_{ij} \times \mathrm{sgn}(Q_{ij}) = \sum_{i,j} |Q_{ij}| = F(Q)$

donc : $n\sqrt{n} - \frac{\sqrt{n}}{2} \|Q - \frac{1}{\sqrt{n}} S(Q)\|^2 = n\sqrt{n} - \frac{\sqrt{n}}{2}\left(n - \frac{2}{\sqrt{n}} F(Q) + \frac{1}{n} n^2\right)$

$= F(Q)$

32 – Donc $F(Q) \leq n\sqrt{n}$ donc $M_n^+ = \max_{Q \in \mathcal{O}_n} F(Q) \leq n\sqrt{n}$.

Avec égalité ssi : $\exists Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ / $\frac{\sqrt{n}}{2} \|Q - \frac{1}{\sqrt{n}} S(Q)\|^2 = 0$

ssi : $\exists Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ / $Q = \frac{1}{\sqrt{n}} S(Q)$

• Ainsi, s'il existe H de Hadamard, $Q = \frac{1}{\sqrt{n}} H \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ convient car

$\frac{1}{\sqrt{n}} S\left(\frac{1}{\sqrt{n}} H\right) = \frac{1}{n} S(H) = \frac{1}{n} H$ (H_n n'est composé que de ± 1)

. Et si on a égalité, $H = \sqrt{n}\, Q$ est de Hadamard car ${}^tHH = {}^t(\sqrt{n}\,Q)\sqrt{n}\,Q = nI$

et $H = \sqrt{n}\,Q = S(Q)$ a ses coefficients égaux à ± 1.

Q. 8.

33 _ $M_n^+ = n\sqrt{n} \iff$ il existe une matrice de Hadamard dans $M_n(\mathbb{R}) \Rightarrow n$ multiple de 4.

donc par contraposée : n non multiple de 4 $\Rightarrow M_n^+ < n\sqrt{n}$ (car $M_n^+ \leq n\sqrt{n}$).

34 _ $U(\alpha,\beta) \in O_3 \iff$ les colonnes de $U(\alpha,\beta)$ forment une b.o.n

$\iff \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 + (-\beta)^2 = 1 & \text{(norme de } C_1, C_2 \text{ et } C_3) \\ \alpha\beta + \beta\alpha - \beta^2 = 0 & \text{(produit scalaire de } C_1, C_2 \text{ et } C_1, C_3 \text{ et } C_2, C_3. \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \alpha^2 + 2\beta^2 = 1 \\ \beta(2\alpha - \beta) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \pm 1 \\ \beta = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} 9\alpha^2 = 1 \iff \alpha = \pm \frac{1}{3} \\ \beta = 2\alpha \end{cases}$

Donc $U(\alpha,\beta) \in O_3 \iff (\alpha,\beta) \in \left\{(1,0);(-1,0);\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right);\left(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)\right\}$.

On a $F\left(U\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\right) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 5$.

donc $M_3^+ \geq 5$ et on sait que $M_3^+ \leq 3\sqrt{3}$ donc :

$M_3^+ \in [5, 3\sqrt{3}[$ (ouvert car $3 \neq 4p$)

35 _ (a) $|\langle x,y\rangle| = \left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right|$ où $\sum x_i y_i$ est une somme de 1 de -1.

Cette somme est non nulle ($\langle x,y\rangle \neq 0$) et elle comporte un nombre pair (n)

de termes donc elle ne peut ni valoir 1 ni -1 donc

$\left|\sum x_i y_i\right| \geq 2$

(b) $|\langle x,y\rangle - \langle u,v\rangle| = |\langle x,y\rangle + \langle u,y\rangle - \langle u,y\rangle - \langle u,v\rangle - \langle u,y\rangle + \langle u,y\rangle|$

$$= |\langle x-u,y\rangle + \langle u, y-v\rangle|$$ Cauchy - Schwarz et inégalité triangulaire

$$\leq \|x-u\|\,\|y\| + \|u\|\,\|y-v\|$$

$$\leq \sqrt{2\,\|x-u\|^2\|y\|^2 + \|u\|^2\|y-v\|^2}$$

Car pour tous $a,b\in\mathbb{R}$, $a+b \leq \sqrt{2(a^2+b^2)}$, en effet cette inégalité équivaut à :

$$\Leftrightarrow a^2+2ab+b^2 \leq 2a^2+2b^2$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2-2ab \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$$ ce qui est vrai.

(c) Comme $S(Q)$ n'est pas de Hadamard, elle possède 2 colonnes x et y non orthogonales.

Donc par 35.a) $|\langle x,y\rangle| \geq 2$.

En notant u et v les colonnes de $\sqrt{m}Q$ correspondant aux mêmes indices que x et y :

on a $\|\sqrt{m}Q - S(Q)\|^2 = \sum \|C_i\|^2 \geq \|u-x\|^2 + \|v-y\|^2$ où C_i sont les colonnes de $\sqrt{m}Q - S(Q)$

De plus $\|u\|^2 = m$ ($Q\in O_m(\mathbb{R})$) et $\|y\|^2 = m$ $\left(y = \begin{pmatrix}\pm1\\ \vdots\\ \pm1\end{pmatrix}\right)$.

On a donc : $m\,\|\sqrt{m}Q - S(Q)\| \geq \|y\|^2\|u-x\|^2 + \|u\|^2\|v-y\|^2$ 35 b.

$$\geq \frac{1}{2}|\langle x,y\rangle - \langle u,v\rangle|$$

or les colonnes de Q et $\sqrt{m}Q$ u et v sont orthogonales donc :

$$m\,\|\sqrt{m}Q - S(Q)\| \geq \frac{1}{2}|\langle x,y\rangle| \geq 1$$

Ainsi $$\left\|Q - \frac{1}{\sqrt{m}}S(Q)\right\|^2 \geq \frac{2}{m^2}$$

(d) $F(Q) = m\sqrt{m} - \frac{\sqrt{m}}{2}\left\|Q - \frac{1}{\sqrt{m}}S(Q)\right\|^2$

Q.35.c) $\delta \leq m\sqrt{m} - \frac{\sqrt{m}}{2}\cdot\frac{2}{m^2} = m\sqrt{m} - \frac{1}{m\sqrt{m}}$