Mathématiques 2 Approfondies 2024 : Un corrigé proposé par G. Brignon

1 – (a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{(n,n)}(x) = P(\max_{1\le i\le n} X_i \le x) = F(x)^n$ car $(X_1, \dots, X_n)$ est i.i.d.

Ainsi $X_{n,n}$ a pour densité : $f_{(n,n)}(x) = n\, f(x)\, F(x)^{n-1}$

(b) $F_{(n,1)}(x) = P(\min_{1\le i\le n} X_i \le x) = 1 - P(\min X_i > x) \overset{(X_1,\dots,X_n)\text{ i.i.d.}}{=} 1 - (1-F(x))^n$.

donc $f_{n,1}(x) = n\, f(x)\,(1-F(x))^{n-1}$.

2 – (a) $Y_{i,x}(\Omega) = \{0,1\}$ et $P(Y_{i,x}=1) = P(X_i \le x) = F(x)$ donc $Y_i \hookrightarrow \mathcal{B}(F(x))$.

(b) $\left[\sum_{i=1}^{n} Y_{i,x} \ge k\right]$ signifie qu'au moins k X_i sont $\le x$, ce qui veut exactement dire que le $k^{\text{ème}}$ plus grand X_i est $\le x$: $[X_{(n,k)} \le x]$.

(c) $Y_{i,x} = \mathbb{1}_{\{X_i \ge x\}}$ donc par $\perp\!\!\!\perp$ des (X_i) et coalitions les (Y_i) sont $\perp\!\!\!\perp$.

Ainsi par stabilité : $\sum_{i=1}^{n} Y_{i,x} \hookrightarrow \mathcal{B}(n, F(x))$.

Donc $F_{(n,\ell)}(x) = P(X_{n,\ell} \le x) = P\left(\sum_{i=1}^{\ell} Y_{i,x} \ge k\right)$ $\quad \downarrow \left(\sum Y_{i,x}\right)(\Omega) = [\![0,n]\!]$

$$= \sum_{j=\ell}^{n} P\left(\sum_{i=1}^{\ell} Y_{i,x} = j\right)$$

$$= \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} F(x)^j (1-F(x))^{n-j}$$

3 – (a) $b_{n,\ell}'(z) = \binom{n}{\ell}\left(\ell z^{\ell-1}(1-z)^{n-\ell} + z^\ell \times (-1)(n-\ell)(1-z)^{n-\ell-1}\right)$

$$= \binom{n}{\ell} \ell\, z^{\ell-1}(1-z)^{n-1-(\ell-1)} - \binom{n}{\ell}(n-\ell)\, z^\ell (1-z)^{n-1-\ell}$$

formule magique et $\binom{n}{\ell} = \binom{n}{n-\ell}$

$$= n\binom{n-1}{\ell-1} z^{\ell-1}(1-z)^{n-1-(\ell-1)} - n\binom{n-1}{\ell} z^\ell (1-z)^{n-1-\ell}$$

$$= n\left(b_{n-1,\ell-1}(z) - b_{n-1,\ell}(z)\right)$$

(le cas $\ell = n$ est clair avec la convention $b_{n-1,n} = 0$)

(b) $a_{m,k}'(z) = \sum_{l=k}^{m} b_{m,l}'(z) = \sum_{l=k}^{m} m\left(b_{m-1,l-1}(z) - b_{m-1,l}(z)\right)$; télescopage

$$= m\left(b_{m-1,k-1}(z) - b_{m-1,m}(z)\right)$$

$$= m\, b_{m-1,k-1}(z).$$

Ainsi $\quad a_{m,k}' = m\, b_{m-1,k-1}$.

(c) $f_{(m,k)}(x) = F_{(m,k)}'(x) = \left(\sum_{l=k}^{m} b_{m,l}(F(x))\right)' = \left(a_{m,k}(F(x))\right)' = f(x)\, m\, b_{m-1,k-1}(F(x))$

4-(a) On a $\quad [\sum Y_{i,x} \geq \lfloor m\alpha \rfloor] \subset [\sum Y_{i,x} \geq m\alpha - 1]$

et $[\sum Y_{i,x} \geq m\alpha - 1] = \left[\frac{1}{m}\sum Y_{i,x} \geq \alpha - \frac{1}{m}\right] = \left[\frac{1}{m}\sum Y_{i,x} - F(x) \geq \alpha - F(x) - \frac{1}{m}\right]$

et $\alpha - F(x) > \varepsilon$ donc pour m assez grand $\alpha - F(x) + \frac{1}{m} > \varepsilon$ donc :

$$\left[\frac{1}{m}\sum Y_{i,x} - F(x) \geq \alpha - F(x) - \frac{1}{m}\right] \subset \left[\frac{1}{m}\sum Y_{i,x} - F(x) \geq \varepsilon\right]$$

enfin, comme $|a| \geq a$ pour tout réel a et que $\varepsilon > 0$, on a la dernière inclusion.

Par croissance de $\mathbb{P}$ et 2b - $0 \leq F_{m,\lfloor \alpha m \rfloor}(x) \leq \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{m}\sum Y_{i,x} - F(x)\right| \geq \varepsilon\right)$

$$\leq \frac{\mathbb{V}(1/m \sum Y_{i,x})}{\varepsilon^2} = \frac{F(x)}{m\varepsilon^2}$$

Bienaymé - Chebychev car $\mathbb{E}\left(\frac{1}{m}\sum Y_{i,x}\right) = F(x)$

Le résultat suit par théorème d'encadrement.

(b) $[\sum Y_{i,m x} < \lfloor \alpha m \rfloor] \subset [\sum Y_{i,m x} < \alpha m]$ $\quad$ car $\lfloor \alpha m \rfloor \leq \alpha m$

$$= \left[\frac{1}{m}\sum Y_{i,m x} - F(x) < \alpha - F(x)\right]$$

$$= \left[-\left(\frac{1}{m}\sum Y_{i,m x} - F(x)\right) > F(x) - \alpha\right]$$

; $F(x) - \alpha > \varepsilon$

$$\subset \left[-\left(\frac{1}{m}\sum Y_{i,m x} - F(x)\right) \geq \varepsilon\right]$$

; car $|a| \geq a$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

$$\subset \left[\left|\frac{1}{m}\sum Y_{i,m x} - F(x)\right| \geq \varepsilon\right]$$

Par passage au complémentaire on a l'inclusion voulue.

Donc par $\nearrow$ de $\mathbb{P}$: $1 \geq F_{m,\lfloor \alpha m \rfloor}(x) \geq \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{m}\sum Y_{i,x} - F(x)\right| < \varepsilon\right)$

Le membre de droite tends vers 1 donc par encadrement : $F_{n,\lfloor \alpha n \rfloor}(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

5_ (a) F est continue et strictement croissante sur I (en tant que primitive de la fonction f continue et strictement positive) elle réalise donc une bijection de I dans $]\lim_a F ; \lim_b F[=]F(a), F(b)[$
$=]0,1[$ car $F(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$ par hypothèse sur f. Idem pour $F(b)$

(b) On a montré que : $\lim_{n\to+\infty} F_{n,\lfloor \alpha n \rfloor}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } F(x) < \alpha < 1 \\ 1 & \text{si } 0 < \alpha < F(x) \end{cases}$

$= \begin{cases} 0 & \text{si } x < F^{-1}(\alpha) \\ 1 & \text{si } x > F^{-1}(\alpha) \end{cases}$

Or la v.a. certaine égale à $F^{-1}(\alpha)$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{F^{-1}(\alpha)\}$, elle coïncide donc avec $\lim_{n\to+\infty} F_{n,\lfloor \alpha n \rfloor}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{F^{-1}(\alpha)\}$:
cela signifie que $X_{n,\lfloor \alpha n \rfloor} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} F^{-1}(\alpha)$.

(c) Soit $\varepsilon > 0$: $P(|X_{n,\lfloor \alpha n \rfloor} - F^{-1}(\alpha)| > \varepsilon)$

$= P(X_{n,\lfloor \alpha n \rfloor} > \varepsilon + F^{-1}(\alpha) \cup X_{n,\lfloor \alpha n \rfloor} < -\varepsilon + F^{-1}(\alpha))$

$P(A\cup B) \leq P(A) + P(B)$

$\leq 1 - F_{n,\lfloor \alpha n \rfloor}(\varepsilon + F^{-1}(\alpha)) + F_{n,\lfloor \alpha n \rfloor}(-\varepsilon + F^{-1}(\alpha))$

$\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 - 1 + 0$ car $\varepsilon + F^{-1}(\alpha) \geq F^{-1}(\alpha)$ et $-\varepsilon + F^{-1}(\alpha) < F^{-1}(\alpha)$

donc $X_{n,\lfloor \alpha n \rfloor} \xrightarrow[n\to+\infty]{P} F^{-1}(\alpha)$

Remarque : Le fait que la CV en $\mathcal{L}$ et en P sont équivalents quand la suite est une variable certaine n'est pas au programme.

6_ tri(T) :

```
s = np.shape(T)[0]
for k in range(1, s) :
    i = 1 ; T[k] = x
    While x < T[k-i] and i<k :
        i += 1
    if i > 1 :
        for j in range(1, i) :
            T[k-j] = T[k-j+1]
        T[k-i] = x
return T
```

7_ (a) return tri(res)[k-1] # tri(res) $= \big(\overset{0}{X_{(m,1)}}, \overset{1}{\ldots\ldots}, \overset{m-1}{X_{(m,m)}}\big)$

(b) A contient différentes valeurs de α de 0 à 1 et B le $X_{m,\lfloor m\alpha \rfloor}$ correspondant. Chaque point a pour coordonnées $(\alpha, X_{m,\lfloor m\alpha \rfloor})$ pour m fixé à 2000 et α un réel de $]0,1[$ qu'on a découpé en 20 subdivisions égales.

(c) On peut conjecturer que, pour m grand, $X_{m,\lfloor m\alpha \rfloor}$ est affine en α i.e. $X_{m,\lfloor m\alpha \rfloor} = a\alpha + b$.

Comme $X_{n,0} = 2$, $b = 2$ et $X_{n,n} = 6$, $a = 4$.

Donc $X_{n,\lfloor \alpha n \rfloor} \simeq 4\alpha + 2$ pour n grand c-à-d $X_{n,\lfloor \alpha n \rfloor} \xrightarrow{P} 4\alpha + 2$.

Ainsi la loi de X vérifie $F_X^{-1}(x) = 4x + 2$ d'après 5.

D'où $F_X(x) = \dfrac{x-2}{4}$ c-à-d $X \hookrightarrow \mathcal{U}([2,6])$

(d) return 4*rd.random(n)+2

car si $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$, $4U+2 \hookrightarrow \mathcal{U}([2,6])$.

8 — On note $P(k)$ la proposition visée.

- $P(1)$ est évidente car $S_1 = T_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(n\lambda)$.
- Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$ telle que $P(k)$ est vraie.

Par conditions S_k et T_{k+1} sont indép et T_{k+1} a sa densité connue (par $(n-k)\lambda$) donc $S_{k+1} = S_k + T_{k+1}$ est à densité et a pour densité : $\forall x \in \mathbb{R}$ $g(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{g_{n,k}(t)}_{HR} \cdot f_{T_{k+1}}(x-t)\, dt$

On a $g_{n,k}(t) \cdot f_{T_{k+1}}(x-t) \neq 0$

$\iff t \geq 0$ et $x - t \geq 0 \iff 0 \leq t \leq x$

(si $x<0$, $g(x)=0$ car $S_{k+1}(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$)

Ainsi : $\forall x > 0$,

$$g(x) = \int_0^x n\binom{n-1}{k-1}\lambda e^{-\lambda(n-k+1)t}(1-e^{-\lambda t})^{k-1}(n-k)\lambda e^{-(n-k)\lambda(x-t)}\,dt$$

$$= \int_0^x n\binom{n-1}{k-1}\lambda^2(n-k)\, e^{-\lambda(n-k)x} e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{k-1}\,dt$$

$$= n\binom{n-1}{k-1}\lambda^2(n-k)\, e^{-\lambda(n-k)x}\left[\frac{(1-e^{-\lambda t})^k}{\lambda k}\right]_0^x$$

$$= \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}\lambda(n-k)\, e^{-\lambda(n-k)x}(1-e^{-\lambda x})^k$$

Or $\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}(n-k) = \binom{n}{k}(n-k) = \binom{n}{n-k}(n-k) = n\binom{n-1}{n-k+1} = n\binom{n-1}{k}$.

Ce qui donne exactement $P(k+1)$.

(b) Il suffit de remplacer la 3b) avec $F(x)=1-e^{-\lambda x}$ et $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$.

9 _ Comme $X_{(n,k)}$ et S_k ont la même loi : $E(X_{(n,k)}) = E(S_k)$

Donc $E(X_{(n,k)}) = \sum_{i=1}^{k} E(T_i) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{(n-i+1)\lambda}$ par linéarité de E.

Par indépendance des (T_i), $V(X_{(n,k)}) = \sum_{i=1}^{k} V(T_i) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{(n-i+1)^2\lambda^2}$.

10 _ (a) • Si $x \geq j$ alors $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{j}$ donc $\frac{1}{j} - \frac{1}{x} \geq 0$.

• Par équivalence : $\frac{1}{j} - \frac{1}{x} \leq \frac{2}{x^2} \iff \frac{x-j}{jx} \leq \frac{2}{x^2}$

$\iff x(x-j) \leq 2j$. Or $x(x-j) \leq (j+1).1 \leq 2j$

Donc : $0 \leq \frac{1}{j} - \frac{1}{x} \leq \frac{2}{x^2}$.

(b) On intègre de j à $j+1$: $0 \leq \int_j^{j+1} \frac{1}{j} - \frac{1}{x} \, dx \leq \int_j^{j+1} \frac{2}{x^2} \, dx$

i.e. $0 \leq \frac{1}{j} - \ln(j+1) + \ln j \leq \frac{2}{j} - \frac{2}{j+1}$.

Sommons de $j = n-k+1$ à $n+1$:

$$0 \leq \sum_{j=n-k+1}^{n+1} \frac{1}{j} - \ln(j+1) + \ln j \leq \sum_{j=n-k+1}^{n+1} \frac{2}{j} - \frac{2}{j+1}$$

Après télescopage et en posant $j = n-i+1$ dans la 1ère somme :

$$0 \leq \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n-i+1} - \ln(n+1) + \ln(n-k+1) \leq \frac{2}{n-k+1} - \frac{2}{n+1}$$

en ajoutant $\ln(n+1) - \ln(n-k+1) = \ln\left(\frac{n+1}{n-k+1}\right)$ et multipliant par $\frac{1}{\lambda}$, on obtient :

$$\frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{n+1}{n-k+1}\right) \leq E(X_{(n,k)}) \leq \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{n+1}{n-k+1}\right) + \frac{2}{\lambda}\left(\frac{2}{n-k+1} - \frac{2}{n+1}\right).$$

(c) On a $\ln\left(\frac{n+1}{n-\lfloor \alpha n \rfloor+1}\right) = \ln\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{\lfloor \alpha n \rfloor}{n}+\frac{1}{n}}\right)$

Classiquement $\frac{\lfloor \alpha n \rfloor}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$, donc par continuité de $\ln$:

$$\ln\left(\frac{n+1}{n-\lfloor \alpha n \rfloor+1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln\left(\frac{1}{1-\alpha}\right) = -\ln(1-\alpha).$$

Ce qui donne le résultat voulu par ~~théorème~~ d'encadrement dans la 10.(b).

11_ $V(X_{(n,\ell)}) = \frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{\ell}\frac{1}{(n-i+1)^2} = \frac{1}{\lambda^2}\sum_{j=n-\ell+1}^{n}\frac{1}{j^2} \leq \frac{1}{\lambda^2} R_{n-\ell}$.

où $R_{n-\ell}$ est le reste d'ordre $n-\ell$ de la série convergente $\sum \frac{1}{j^2}$.

Donc $R_{n-\ell} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $V(X_{(n,\ell)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

12_ (a) $P\left(\left|X_{(n,\lfloor \alpha n \rfloor)} + \frac{1}{\lambda}\ln(1-\alpha)\right| \geq \varepsilon\right)$ stricte ↗ de $t \mapsto t^2$ sur $\mathbb{R}_+$

$= P\left(\left(X_{(n,\lfloor \alpha n \rfloor)} + \frac{1}{\lambda}\ln(1-\alpha)\right)^2 \geq \varepsilon^2\right)$ Markov

$\leq \frac{1}{\varepsilon^2} E\left(\left(X_{n,\lfloor \alpha n \rfloor} + \frac{1}{\lambda}\ln(1-\alpha)\right)^2\right)$

(b) $E\left(\left(X_{n,\lfloor \alpha n \rfloor} + \frac{1}{\lambda}\ln(1-\alpha)\right)^2\right) \overset{\text{Huygens}}{=} V\left(X_{n,\lfloor \alpha n \rfloor} + \frac{1}{\lambda}\ln(1-\alpha)\right) + E\left(X_{n,\lfloor \alpha n \rfloor} + \frac{1}{\lambda}\ln(1-\alpha)\right)^2$

$= V(X_{n,\lfloor \alpha n \rfloor}) + \left[E(X_{n,\lfloor \alpha n \rfloor}) + \frac{1}{\lambda}\ln(1-\alpha)\right]^2$

$\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 + 0^2 = 0$ d'après 10_(c) et 11.

Donc par encadrement, on a :

$\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|X_{n,\lfloor \alpha n \rfloor} + \frac{1}{\lambda}\ln(1-\alpha)\right| \geq \varepsilon\right) = 0$

i.e. $X_{(n,\lfloor \alpha n \rfloor)} \xrightarrow[n\to+\infty]{P} -\ln(1-\alpha)$

13_ La Q.5. En effet : $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ donc $F^{-1}(x) = -\ln(1-x)$.

16-(a) $\mathrm{Card}(\{i \in [\![1,n]\!] \mid X_i > t\}) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{[X_i > t]} \hookrightarrow \mathcal{B}(n, P(X_i > t))$
$= \mathcal{B}(n, e^{-\lambda t})$

par indépendance des $(X_i)_{i \geq 1}$

Ainsi $V_{n,t} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{[X_i > t]} + \frac{1}{n}$.

D'après la loi des grands nombres : $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{[X_i > t]} \xrightarrow[n \to +\infty]{P} E(\mathbb{1}_{[X_1 > t]}) = e^{-\lambda t}$.

De plus $\frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{P} 0$ car : $\forall \varepsilon > 0 \quad P(|\frac{1}{n} - 0| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ (en fait $= 0$ pour n assez grand)

Donc d'après le cours : $V_{n,t} \xrightarrow{P} e^{-\lambda t} + 0$.

(b) $P(|-\ln V_{n,t} - \lambda t| \leq \varepsilon)$

$= P(|\ln V_{n,t} + \lambda t| \leq \varepsilon)$

$= P(-\varepsilon \leq \ln V_{n,t} + \lambda t \leq \varepsilon)$; stricte ↗ de $u \mapsto e^u$

$= P(e^{-\varepsilon} \leq V_{n,t} \cdot e^{\lambda t} \leq e^{\varepsilon})$

$= P(e^{-\varepsilon} \cdot e^{-\lambda t} - e^{-\lambda t} \leq V_{n,t} - e^{-\lambda t} \leq e^{\varepsilon} \cdot e^{-\lambda t} - e^{-\lambda t})$

$= P(e^{-\lambda t}(e^{-\varepsilon} - 1) \leq V_{n,t} - e^{-\lambda t} \leq e^{-\lambda t}(e^{\varepsilon} - 1))$

$= P(e^{-\lambda t}(1 - e^{\varepsilon}) \leq e^{-\lambda t} - V_{n,t} \leq e^{-\lambda t}(1 - e^{-\varepsilon}))$

$\geq P(e^{-\lambda t}(e^{-\varepsilon} - 1) \leq e^{-\lambda t} - V_{n,t} \leq e^{-\lambda t}(1 - e^{-\varepsilon})) = P(|e^{-\lambda t} - V_{n,t}| \leq e^{-\lambda t}(1 - e^{-\varepsilon}))$

(car $e^{-\lambda t}(e^{-\varepsilon} - 1) \geq e^{-\lambda t}(1 - e^{\varepsilon})$, en effet cette inégalité $\iff e^{-\varepsilon} - 1 \geq 1 - e^{\varepsilon} \iff e^{\varepsilon} + e^{-\varepsilon} - 2 \geq 0$
$\iff e^{2\varepsilon} + 1 - 2e^{\varepsilon} \geq 0$
$\iff (e^{\varepsilon} - 1)^2 \geq 0$)

- Comme $V_{n,t} \xrightarrow{P} e^{-\lambda t}$ et $e^{-\lambda t}(1 - e^{-\varepsilon}) > 0$,

$P(|V_{n,t} - e^{-\lambda t}| \geq e^{-\lambda t}(1 - e^{-\varepsilon})) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$.

donc par encadrement : $P(|-\ln(V_{n,t}) - \lambda t| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

i.e. $-\ln(V_{n,t}) \xrightarrow[n \to +\infty]{P} \lambda t$

(c) $W_n = \frac{1}{t_2 - t_1} \ln\left(\frac{V_{n,t_1}}{V_{n,t_2}}\right) = \frac{1}{t_2 - t_1}(\ln(V_{n,t_1}) - \ln(V_{n,t_2}))$

$\xrightarrow{P} \frac{1}{t_2 - t_1}(-\lambda t_1 - (-\lambda t_2)) = \lambda$

d'après 14 (a) et vu que la convergence en $\mathbb{P}$ est conservée par combinaisons linéaires. Ainsi $U_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \lambda$ et U_n est une fonction des (X_i) indépendante de λ : U_n est un estimateur convergent de λ.

15 _ Ce théorème affirme l'égalité entre les variables aléatoires alors que la 8 b) affirme l'égalité des lois. C'est bien sûr plus fort. Prenez X et Y les n° d'un lancer de deux dés : X et Y ont la même loi pourtant $X \neq Y$.

16 _ On vérifie aisément que $Z+1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

- Donc $E(Z) = E(Z+1) - 1 = \frac{1}{p} - 1$.

  $V(Z) = V(Z+1) = \frac{q}{p^2}$.

- $\mathbb{P}(Z \geq \ell) = \sum_{k=\ell}^{+\infty} \mathbb{P}(Z = k) = \sum_{k=\ell}^{+\infty} pq^k = p \cdot q^\ell \cdot \frac{1}{1-q} = q^\ell$.

17 _ (a) $\mathbb{P}(U_n \geq \ell) = \mathbb{P}(Z \geq \ell)^n = q^{n\ell}$ car les (Z_i) sont i.i.d.

(b) $\mathbb{P}(U_n = \ell) = \mathbb{P}(U_n \geq \ell) - \mathbb{P}(U_n \geq \ell+1)$ car $U_n(\Omega) \subset \mathbb{Z}$

$$= q^{n\ell} - q^{n(\ell+1)} = q^{n\ell}(1-q^n)$$

$$= (q^n)^\ell (1-q^n)$$

Donc $U_n \hookrightarrow \mathcal{L}(q^n)$

18 _ $\mathbb{P}(Z_1 \geq k_1 \cap Z_2 - Z_1 \geq k_2)$

$$= \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z_1 \geq k_1 \cap Z_2 - Z_1 \geq k_2 \cap Z_1 = i) \quad (\text{s.c.e. } ([Z_1 = i])_{i \geq 0})$$

$= \sum_{i=k_1}^{+\infty} \mathbb{P}(Z_1 = i \cap Z_2 \geq k_2+i)$, $Z_1 \perp\!\!\!\perp Z_2$

$= \sum_{i=k_1}^{+\infty} p\, q^i \cdot q^{k_2+i}$

$= p\, q^{k_2} \sum_{i=k_1}^{+\infty} (q^2)^i = p\, q^{k_2} \cdot q^{2k_1} \cdot \frac{1}{1-q^2} = q^{2k_1} q^{k_2} \cdot \frac{1}{1+q}$ (car $p = 1-q$)

19 – (a) $X_1(\Omega) = \mathbb{R}_+$ et $m>0$ donc $Z_1(\Omega) = \mathbb{N}$.

$\forall k \geq 0$, $\mathbb{P}(Z_1 = k) = \mathbb{P}(k \leq mX_1 < k+1)$

$= F_X\left(\frac{k+1}{m}\right) - F_X\left(\frac{k}{m}\right)$

$= 1 - e^{-\lambda\left(\frac{k+1}{m}\right)} - \left(1 - e^{-\lambda \frac{k}{m}}\right)$

$= e^{-\lambda \frac{k}{m}}\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{m}}\right) =$

Ainsi $Z_1 \hookrightarrow \mathcal{L}(e^{-\lambda/m})$ et de même pour Z_2.

(b) • $Z_1 \geq k_1 + 1$

$\Leftrightarrow \lfloor mX_1 \rfloor \geq \lfloor mx \rfloor + 1$, $\lfloor mX_1 \rfloor$ et $\lfloor mx \rfloor \in \mathbb{Z}$.

$\Leftrightarrow \lfloor mX_1 \rfloor > \lfloor mx \rfloor$, $\nearrow$ de $t \mapsto \lfloor t \rfloor$ (on n'a qu'une $\Rightarrow$ car la $\nearrow$ n'est pas stricte)

$\Rightarrow mX_1 > mx$, $m > 0$

$\Leftrightarrow X_1 > x$ A ce stade, on a $[Z_1 \geq k_1+1] \subset [X_1 > x]$

$\Leftrightarrow mX_1 > mx$, $\nearrow$ de $t \mapsto \lfloor t \rfloor$ (encore une fois, la non stricte $\nearrow$ fait perdre l'$\Leftrightarrow$ et le caractère strict de l'inégalité)

$\Rightarrow \lfloor mX_1 \rfloor \geq \lfloor mx \rfloor$

$\Leftrightarrow Z_1 \geq k_1$ On a donc $[X_1 > x] \subset [Z_1 \geq k_1]$

• $Z_2 - Z_1 \geq k_2 + 2$

$\Leftrightarrow \lfloor mX_2 \rfloor - \lfloor mX_1 \rfloor \geq \lfloor my \rfloor + 2$, on a $mX_2 - 1 < \lfloor mX_2 \rfloor \leq mX_2$
et $mX_1 - 1 < \lfloor mX_1 \rfloor \leq mX_1$
donc $mX_2 - mX_1 - 1 \leq \lfloor mX_2 \rfloor - \lfloor mX_1 \rfloor \leq mX_2 - mX_1 + 1$

$\Rightarrow mX_2 - mX_1 + 1 > \lfloor my \rfloor + 2$

$\Leftrightarrow mX_2 - mX_1 > \lfloor my \rfloor + 1$; $\lfloor my \rfloor + 1 \geq my$

$\Rightarrow mX_2 - mX_1 > my$

$\Leftrightarrow X_2 - X_1 > y$ A ce stade, on a $[Z_2 - Z_1 \geq k_2 + 2] \subset [X_2 - X_1 > y]$

$\Leftrightarrow mX_2 - mX_1 > my$

$\Leftrightarrow mX_2 - mX_1 - 1 > my - 1$; car $mX_2 - mX_1 - 1 \leq \lfloor mX_2 \rfloor - \lfloor mX_1 \rfloor$
et $my - 1 \leq \lfloor my \rfloor$

$\Rightarrow \lfloor mX_2 \rfloor - \lfloor mX_1 \rfloor \geq \lfloor my \rfloor$

$\Leftrightarrow Z_2 - Z_1 \geq k_2$ Cela donne la dernière inclusion.

(c) On a donc les inclusions (en effet $A \subset B$ et $E \subset D$ implique $A \cap E \subset B \cap D$)

$[Z_1 \geq k_1 + 1] \cap [Z_2 - Z_1 \geq k_2 + 2] \subset [X_1 > x] \cap [X_2 - X_1 > y] \subset [Z_1 \geq k_1] \cap [Z_2 - Z_1 \geq k_2]$

puis on applique $\mathbb{P}$ et on utilise la 1δ à gauche et à droite.

(d) On a $e^{-\lambda/m} \xrightarrow[m \to +\infty]{} 1$ et $\frac{\lfloor mx \rfloor}{m} \xrightarrow[m \to +\infty]{} x$ donc :
le membre de gauche et de droite de l'inégalité précédente tendent vers :
$\frac{1}{2} e^{-2\lambda x} e^{-\lambda y}$. Donc par encadrement, on a le résultat voulu.

2. (a). $\mathbb{P}(X_1 = X_2) = \mathbb{P}(X_1 - X_2 = 0)$

or X_1 et $(-X_2)$ sont à densité, indépendantes et X_1 a sa densité bornée (par λ)

donc par convolution $X_1 - X_2$ est à densité, d'où : $\mathbb{P}(X_1 - X_2 = 0) = 0$.

- $\mathbb{P}(X_1 > 0) = e^{-\lambda 0} = 1$ donc X_1 est p.s. > 0.
- $\mathbb{P}(X_{(2)} - X_{(1)} > 0) = \mathbb{P}(\overline{X_1 = X_2}) = 1$

car $X_{(2)} = \max(X_1, X_2)$ donc $X_{(2)} - X_{(1)}$ est p.s ≥ 0.

(b) $P(X_{(1)} > x \cap X_{(2)} - X_{(1)} > y)$ système quasi complet $([X_1 > X_2], [X_2 > X_1])$ car $[X_1 = X_2]$ est négligeable

$= P([X_{(1)} > x \cap X_{(2)} - X_{(1)} > y \cap X_1 > X_2] \cup [X_{(1)} > x \cap X_{(2)} - X_{(1)} > y \cap X_1 < X_2])$

$= P(X_1 > x \cap X_1 - X_2 > y \cap X_1 > X_2) + P(X_2 > x \cap X_2 - X_1 > y \cap X_1 < X_2)$

$= P(X_1 > x \cap X_1 - X_2 > y) + P(X_2 > x \cap X_2 - X_1 > y)$

(car $y \geq 0$ donc $[X_1 - X_2 > y] \subset [X_1 > X_2]$ et $[X_2 - X_1 > y] \subset [X_1 < X_2]$)

$= 2 P(X_1 > x \cap X_1 - X_2 > y)$ car X_1 et X_2 jouent des rôles symétriques étant de même loi et indépendants

(c) • $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{T_1}(x) = P(X_{(1)} \leq x) = P(\min X_1, X_2 \leq x)$, indep et même loi

$= 1 - P(X_1 > x)^2 = \begin{cases} 1 - e^{-2\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

Donc $T_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(2\lambda)$.

• $T_2 = X_{(2)} - X_{(1)} = |X_2 - X_1|$.

Par convolution $A = X_2 - X_1$ a pour densité (à ce stade, plus le temps de détailler)

$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_2}(t) \cdot f_{-X_1}(x-t)\, dt$

a $f_{X_2}(t) \cdot f_{-X_1}(x-t) \neq 0 \iff t \geq 0$ et $x - t \leq 0 \iff t \geq \max(0, x)$.

- Si $x \leq 0$: $h(x) = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} \lambda e^{\lambda(x-t)} dt = \int_0^{+\infty} e^{-2\lambda t} dt\, \lambda^2 e^{\lambda x} = \left[\frac{e^{-2\lambda t}}{-2}\right]_0^{+\infty} \lambda e^{\lambda x} = \frac{\lambda}{2} e^{\lambda x}$

- Si $x > 0$: $h(x) = \int_x^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} \lambda e^{\lambda(x-t)} dt = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda x}$.

Donc : $T = |A|$ est à support dans $\mathbb{R}_+$ et :

$\forall x \in \mathbb{R}_+, F_T(x) = P(-x \leq A \leq x) = \int_{-x}^{x} h(t)\, dt = \int_{-x}^{0} \frac{\lambda}{2} e^{\lambda t} dt + \int_0^x \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda t} dt$

$= \left[\frac{e^{\lambda t}}{2}\right]_{-x}^{0} + \left[-\frac{e^{-\lambda t}}{2}\right]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$.

Ainsi $T \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

• Soient $(x,y) \in [0,+\infty[^2$. $\mathbb{P}(T_1 > x \cap T_2 > y)$

$$= \mathbb{P}(X_{(1)} > x \cap X_{(2)} - X_{(1)} > y) \quad 20.\ b)$$

$$= 2\mathbb{P}(X_1 > x \cap X_2 - X_1 > y) \quad 19.\ d)$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} e^{-2\lambda x} e^{-\lambda y} \quad T_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(2\lambda) \text{ et } T_2 \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$$

$$= \mathbb{P}(T_1 > x) \cdot \mathbb{P}(T_2 > y)$$

Ainsi les événements $[T_1 > x]$ et $[T_2 > y]$ sont indépendants pour tous réels $x, y \geq 0$.

Pour x ou y négatif, un des deux événements est négligeable donc le résultat vaut pour tous $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: T_1 et T_2 sont indépendantes.

On a démontré le théorème de la Q.15 dans le cas $n = 2$.

car $X_{(1)} = T_1$ et $X_{(2)} = X_{(1)} + X_{(2)} - X_{(1)} = T_2$

où $T_1 \hookrightarrow \mathcal{E}((2-1+1)\lambda) = \mathcal{E}(2\lambda)$ et $T_2 \hookrightarrow \mathcal{E}((2-2+1)\lambda) = \mathcal{E}(\lambda)$

avec T_1 et T_2 indépendants.