Exercice 1 - Non modifié, faisable entièrement

Dans tout l'exercice, la lettre n désigne un entier naturel.

On pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{4-x^2}\mathrm{d}x$ et on a en particulier $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{4-x^2}\mathrm{d}x$.

1. (a) Déterminer les réels a et b tels que :

$$\forall x \in [0,1], \frac{1}{4-x^2} = \frac{a}{2-x} + \frac{b}{2+x}$$

   (b) En déduire que $u_0 = \dfrac{1}{4}\ln(3)$.

2. Calculer u_1.

3. (a) Pour tout entier naturel n, exprimer $4u_n - u_{n+2}$ explicitement en fonction de n.

   (b) Compléter la fonction Python ci-dessous afin qu'elle renvoie la valeur de u_n à l'appel de `suite(n)`.

```python
def suite(n):
    if (-1)**n == 1 :
        u = np.log(3) / 4
        for k in range(2,n + 1,2) :
            u = 4 * u - ...
    else :
        u = np.log(2 / np.sqrt(3))
        for k in range(3,n + 1,2) :
            u = 4 * u - ...
    return u
```

4. (a) Utiliser la définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour établir l'encadrement suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{4(n+1)} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{3(n+1)}$$

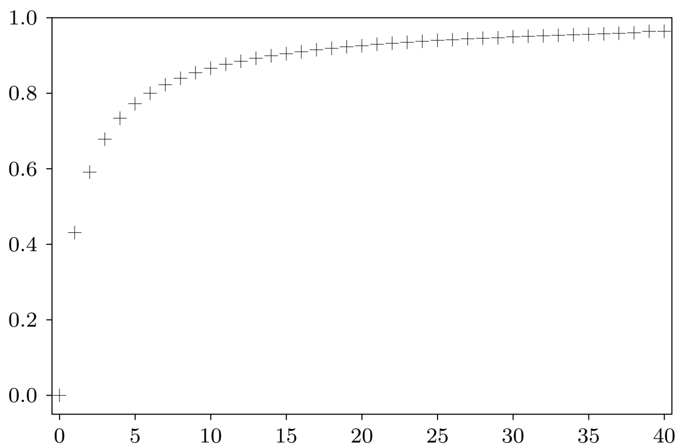
   (b) En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi que la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

   (c) La série de terme général u_n est-elle convergente ou divergente ? Pour quelle raison ?

5. (a) On considère le script suivant qui utilise la fonction déclarée plus haut :

```python
x = np.arange(0,41)
u = [] # liste vide
for n in range(41):
    u.append(3 * n * suite(n))
plt.plot(x,u,'+')
plt.show()
```

Ce script renvoie le graphique suivant :



Laquelle des quatre conjectures suivantes peut-on émettre quant au comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ au voisinage de $+\infty$?

❶ $u_n \underset{+\infty}{\sim} 3n$ ❷ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$. ❸ $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{3n}$. ❹ $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

(b) Établir, grâce à une intégration par parties, l'égalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{3(n+1)} - \frac{2}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} \, \mathrm{d}x$$

(c) Montrer par encadrement que :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx = 0$$

(d) Vérifier la conjecture établie à la question 5a).

Exercice 2 - pas faisable en première année

Toutes les variables aléatoires rencontrées dans cet exercice sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

1. Soit f la fonction qui à tout réel x associe

$$f(x) = \begin{cases} x\mathrm{e}^{-x^2/2} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(a) Montrer que f peut être considérée comme densité d'une certaine variable aléatoire X.

(b) Rappeler la valeur du moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

(c) En déduire, par des considérations de parité, que X a une espérance et que $E(X) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

2. On note F_X la fonction de répartition de X. Déterminer $F_X(x)$ selon que $x < 0$ ou $x \geqslant 0$.

3. Simulation

(a) On pose $Z = X^2$ et on note F_Z sa fonction de répartition. Déterminer $F_Z(x)$ dans chacun des cas $x < 0$ et $x \geqslant 0$ et montrer que Z suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

(b) Utiliser la question 3a) pour écrire une fonction Python d'en-tête `def simulx()` qui renvoie une simulation de X.

4. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $Y_n = \frac{X}{\sqrt{n}}$ et on note G_n la fonction de répartition de Y_n.

(a) Montrer que l'on a :

$$G_n(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-nx^2/2} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

(b) Étudier la convergence en loi de la suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(c) Montrer que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} P(|Y_n| > \varepsilon) = 0$$

5. On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes, et suivant toutes la même loi que X. Pour tout entier naturel n non nul, on pose
$M_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$.

(a) Exprimer, pour tout réel $x, P(M_n > x)$ à l'aide de la fonction F_X, puis en déduire que M_n suit la même loi que la variable Y_n présentée à la question 4).

(b) Compléter la fonction Python suivante afin qu'elle renvoie une simulation de M_n à l'appel de `simulM(n)`.

```
def simulM(n):
    X = np.array(———— for k in range(n)])
    M = ————
    return M
```

Exercice 3 - non modifié, faisable entièrement

On se propose de déterminer s'il existe des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ et vérifiant l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 + \int_0^x t f(x-t) \mathrm{d}t \tag{*}$$

1. Montrer que l'égalité (*) est équivalente à l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 + \int_0^x (x-u) f(u) \mathrm{d}u \tag{**}$$

2. On suppose dans cette question qu'une fonction f, continue sur $\mathbb{R}$, est solution de ce problème.
   (a) Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \int_0^x f(u) \mathrm{d}u$$

   (b) En déduire que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = f(x)$$

   (c) Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle obtenue ci-dessus.
   (d) Déterminer $f(0)$ et $f'(0)$ puis montrer que le problème posé au début de cet exercice a au plus une solution qui est la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

3. Vérifier qu'effectivement la fonction trouvée à la question 2d) est la seule solution du problème proposé en début d'exercice.
4. On se propose de déterminer maintenant s'il existe des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ et vérifiant l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_0^x t f(x-t) \mathrm{d}t$$

   Sans refaire les calculs faits précédemment, mais en précisant les résultats qui restent valables, montrer que ce nouveau problème possède une seule solution que l'on déterminera.

Problème - presque pas modifié

Dans ce problème, on identifie une matrice de $\mathscr{M}_1(\mathbb{R})$ à un réel.

On considère deux urnes A et B contenant initialement une boule blanche et une boule noire chacune. On procède à une suite d'épreuves, chaque épreuve consistant à tirer au hasard une boule dans chaque urne, la boule tirée de A étant remise dans B et la boule tirée de B étant remise dans A.

Pour tout entier naturel n, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans A avant la $(n+1)^{\mathrm{e}}$ épreuve.

On pose : $a_n = P(X_n = 0), b_n = P(X_n = 1), c_n = P(X_n = 2)$ et $U_n = (a_n b_n c_n)$.

1. (a) Donner les valeurs de a_0, b_0 et c_0.
   (b) Déterminer la loi de X_1 et en déduire les valeurs de a_1, b_1 et c_1.
   (c) Justifier rapidement que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,
   $((X_n = 0), (X_n = 1), (X_n = 2))$ est un système complet d'événements.
   (d) En déduire, pour tout entier naturel n, la valeur de la somme $a_n + b_n + c_n$.

On admet dans la suite que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, les probabilités a_n, b_n et c_n sont non nulles.

2. Soit n un entier naturel non nul.
   (a) Déterminer, en les justifiant, les probabilités conditionnelles $P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j)$, pour tout $(i,j) \in [\![0,2]\!]^2$.
   (b) Écrire la matrice $M = (m_{i,j})_{(i,j)\in[\![0,2]\!]^2}$, où $m_{i,j} = P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j)$. On remarquera que la première ligne et la première colonne de cette matrice sont numérotées 0 , la deuxième ligne et la deuxième colonne sont numérotées 1 et la troisième ligne et la troisième colonne sont numérotées 2. On vérifiera avant de poursuivre que la somme des éléments de chaque ligne de M est égale à 1.
   (c) Utiliser la formule des probabilités totales pour exprimer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.

3. Vérifier que les relations trouvées à la question 2c) restent valables pour $n = 0$.
4. (a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, exprimer $E(X_{n+1})$ en fonction de b_{n+1} et c_{n+1}.
   (b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $E(X_{n+1}) = 1$.
   (c) Établir finalement la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n + 2c_n = 1$$

5. On pose $V = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et on considère, pour tout entier naturel n, la matrice-ligne $U_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$ élément de $\mathscr{M}_{1,3}(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que la suite $(U_n V)_{n \in \mathbb{V}}$ est une suite géométrique et donner sa raison.
   (b) Pour tout entier naturel n, en déduire explicitement $2a_n - b_n + 2c_n$ en fonction de n.
6. Déterminer, pour tout entier naturel n, a_n, b_n et c_n puis donner la loi de X_n.
7. Calculer la limite de la loi de la suite des variables $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
8. On se propose de retrouver la loi de X_n par une autre méthode.
   (a) Calculer M^2 et M^3, puis vérifier que $2M^3 = M^2 + M$.
   (b) En déduire un polynôme annulateur de M. M est-elle inversible ?
   (c) On pose $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Justifier sans calcul que P est inversible.
   (d) On pose $D = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer MP et PD, puis établir que $M = PDP^{-1}$.
   (e) Établir la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = U_n M$$

   (f) En déduire la relation, valable pour tout entier naturel n :

$$U_n = U_0 M^n$$

   (g) Donner, sans faire les calculs, une stratégie pour obtenir la loi de X_n à partir de cette dernière relation (on précisera les différentes étapes permettant de conclure).