Exercice 1

Les parties B et C sont indépendantes de la partie A.
*Les questions précédées d'** ne sont pas traitables en première année*

Partie A : Résolution d'un système différentiel

On considère l'équation différentielle

$$(E)\ :\quad x'(t) = -x(t) + e^{-t},$$

où x est une fonction définie et dérivable sur $\mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathbf{R}$.

1. a) Résoudre l'équation différentielle homogène $x'(t) = -x(t)$ sur $\mathbf{R}$.
   b) Déterminer une solution particulière x_0 de (E) de la forme $x_0 : t \mapsto (at+b)e^{-t}$ avec $(a,b) \in \mathbf{R}^2$.
   c) Résoudre l'équation différentielle (E).

On s'intéresse maintenant au système différentiel :

$$(S)\ :\quad \begin{cases} x'(t) &= -x(t) + y(t) \\ y'(t) &= -y(t) \end{cases}$$

où x et y désignent des fonctions définies et dérivables sur $\mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathbf{R}$.

2. a) Donner la matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ telle que

$$(S) \iff X'(t) = AX(t) \quad \text{avec} \quad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

   b) Justifier l'existence d'une unique solution (x,y) de (S) telle que $x(0) = 1$ et $y(0) = 1$.
   c) Déterminer cette solution (x,y) en vous aidant de la question 1.
   d) Étudier la convergence de la solution (x,y) vers un état d'équilibre lorsque t tend vers $+\infty$.

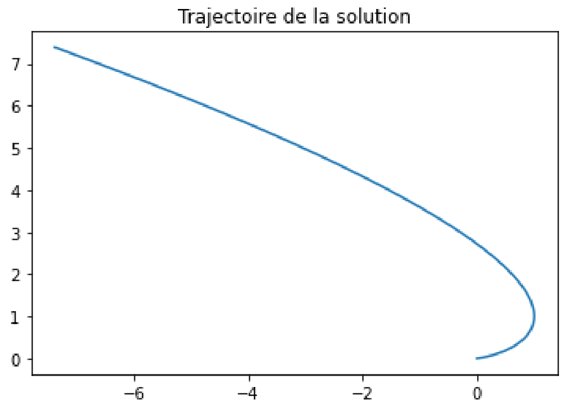
3. Recopier et compléter le programme en langage Python ci–dessous de manière à ce qu'il produise le graphique sur la droite représentant la trajectoire $t \mapsto (x(t), y(t))$ pour $t \in [-2, 10]$.

   On rappelle que la commande `np.linspace(-2,10,200)` crée une liste de 200 valeurs régulièrement espacées allant de -2 à 10.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

T = np.linspace(-2,10,200)
x = [ ... for t in T]
y = [ ... for t in T]

plt.title("Trajectoire de la solution")
plt.plot( ... )
plt.show()
```



Tournez la page S.V.P.

Partie B : Étude d'une suite de fonctions

Pour tout entier $k \in \mathbf{N}^*$, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f_k(x) = (x+1)e^{kx}.$$

On note $\mathscr{C}_k$ la courbe de f_k dans le plan muni d'un repère orthonormé.

4. a) Calculer les limites de la fonction f_k en $-\infty$ et en $+\infty$.

   b) Dresser le tableau de variation de f_k en y faisant figurer les valeurs prises par f_k en -1 et en 0.

5. a) Étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_k$ et $\mathscr{C}_{k+1}$. Vous préciserez leurs points d'intersection.

   b) Dessiner sur un même graphique l'allure de $\mathscr{C}_k$ et $\mathscr{C}_{k+1}$.

Partie C : Étude d'une suite implicite

6. a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, l'équation $f_k(x) = k$ admet une unique solution dans $\mathbf{R}$ notée u_k.

   b) Déterminer explicitement u_1.

7. Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 1$, on a :

$$0 \leqslant u_k \leqslant \frac{\ln(k)}{k}.$$

   En déduire que la suite (u_k) converge et donner sa limite.

8. a) Soit $k \geqslant 1$ un entier, montrer que :

$$u_k \quad = \quad \frac{\ln(k)}{k} - \frac{\ln(u_k+1)}{k}.$$

   b) En déduire que $u_k \sim \dfrac{\ln(k)}{k}$ lorsque k tend vers $+\infty$.

9. * Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} u_k$?

Exercice 2

On considère les matrices carrées d'ordre deux suivantes :

$$0_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathscr{C}$ le sous–ensemble de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ défini par :

$$\mathscr{C} = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})\ ;\ AM = MA\}.$$

Partie A : Étude de A et de $\mathscr{C}$

1. Calculer A^2. En déduire que A est inversible et donner son inverse.
2. Le polynôme annulateur de la matrice obtenu à partir de la question précédente a-til des racines ?
3. Justifier que $\mathscr{C}$ est un sous–espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.

4. a) Résoudre l'équation $AM = MA$ d'inconnue $M \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.

   b) Montrer que (I_2, A) est une base de $\mathscr{C}$.

5. Soient M et N deux matrices quelconques de $\mathscr{C}$.

   a) Montrer que le produit MN appartient à $\mathscr{C}$.

   b) Montrer que M et N commutent, c'est–à–dire que $MN = NM$.

6. Soit M une matrice non nulle de $\mathscr{C}$. Montrer que M est inversible et que M^{-1} appartient à $\mathscr{C}$.

Partie B : Toute équation du second degré admet une solution dans $\mathscr{C}$

On fixe un polynôme unitaire du second degré à coefficients réels :

$$P(x) = x^2 + ux + v \quad \text{avec } (u, v) \in \mathbf{R}^2.$$

On note $\Delta = u^2 - 4v$ son discriminant.
Le but de cette partie est de montrer qu'il existe une matrice $M \in \mathscr{C}$ telle que $P(M) = 0_2$.

7. Soit $M = aI_2 + bA$ avec $(a, b) \in \mathbf{R}^2$.

   a) Montrer : $M^2 = (a^2 - b^2)I_2 + 2abA$.

   b) En déduire :

$$P(M) = 0_2 \iff \left\{ \begin{array}{rcl} a^2 - b^2 + ua + v & = & 0 \\ 2ab + ub & = & 0 \end{array} \right.$$

8. Dans cette question, on montre que le système ci–dessus admet au moins une solution $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ en distinguant deux cas :

   a) Si $\Delta \geqslant 0$, montrer que le système admet au moins une solution de la forme $(a, 0)$.

   b) Si $\Delta < 0$, montrer que le système admet au moins une solution (a, b) avec $b \neq 0$.

9. En vous aidant de la question précédente, donner une matrice $M \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ telle que $M^2 + M + I_2 = 0_2$.

Partie C : Un endomorphisme bijectif de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$

On considère l'application $\varphi : \mathscr{M}_2(\mathbf{R}) \to \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ définie par :

$$\forall M \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R}), \quad \varphi(M) = AMA.$$

On note (E_1, E_2, E_3, E_4) la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ définie par :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

10. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.

11. Calculer $\varphi \circ \varphi$. En déduire que l'endomorphisme φ est bijectif, et donner φ^{-1}.

12. a) Calculer $\varphi(E_1), \ldots, \varphi(E_4)$, puis donner la matrice B de φ dans la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.

    b) ** Justifier sans calcul que B est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(B) = \{-1, 1\}$.
    (On pourra remarquer que $B^2 = I_4$ où I_4 est la matrice identité d'ordre 4)

    c) ** Déterminer une base de chaque sous–espace propre de B.

Exercice 3

Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 1. On dispose d'une urne contenant N boules numérotées de 1 à N, et on effectue une succession illimitée de tirages d'une boule avec remise dans l'urne. Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, on note X_k la variable aléatoire indiquant le numéro de la boule obtenue au k–ième tirage.

Pour tout entier $i \in [\![1;N]\!]$, on note T_i la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir i numéros distincts, ainsi $T_i = k$ si on a obtenu i numéros distincts lors des k premiers tirages, mais seulement $i-1$ numéros distincts lors des $k-1$ premiers tirages.

Exemple : on suppose $N = 4$, si les huit premiers tirages donnent

i	1	2	3	4	5	6	7	8
X_i	2	3	3	3	1	2	1	4

alors $T_1 = 1$, $T_2 = 2$, $T_3 = 5$ et $T_4 = 8$.

Partie A : Simulation informatique

1. Soit $k \in \mathbf{N}^*$. Reconnaître la loi de X_k.
2. Le programme en langage Python ci–dessous définit une fonction « `ajout` » qui prend en argument une liste `L` et un entier `x`.

```
def ajout(L,x):
    if (x in L) == False :
        L.append(x)
```

   Expliquez succinctement comment et à quelle condition l'exécution de la commande `ajout(L,x)` modifie la liste `L`.

3. Recopier et compléter la fonction Python « `Simul_T` » ci–dessous.
   Cette fonction prend en argument deux entiers $N \in \mathbf{N}^*$ et $i \in [\![1;N]\!]$. Elle a pour but de simuler la variable aléatoire T_i. Dans le script nous notons :
   - `L` la liste sans répétition des numéros sortis lors des tirages effectués ;
   - `k` le rang du tirage en cours ;
   - `x` le résultat du tirage en cours.

```
import numpy.random as rd

def Simul_T(N,i):
    L = []
    k = 0
    while ... :
        x = rd.randint(1,N+1)
        ajout(L,x)
        k = ...
    return(...)
```

4. On suppose $N = 3$.
   Rédiger un programme Python qui calcule et affiche la moyenne de 100 réalisations de `Simul_T(3,2)`.
   Que représente le résultat obtenu par rapport à la variable aléatoire T_2 ?

Partie B : Étude de T_2 dans le cas d'une urne contenant trois boules

Dans cette partie on suppose $N = 3$, ainsi l'urne contient exactement trois boules numérotées 1, 2 et 3.

5. Donner l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire T_2.
6. Soit $k \geqslant 2$ un entier fixé.
   a) Décrire l'évènement $(T_2 = k) \cap (X_1 = 1)$ à l'aide des évènements $(X_j = 1)$ et $(X_j \neq 1)$ avec $j \in \mathbf{N}^*$.
   b) En déduire $P((T_2 = k) \cap (X_1 = 1))$.
   c) Montrer que $P(T_2 = k) = \dfrac{2}{3^{k-1}}$.
7. Justifier que T_2 admet une espérance et la calculer.
8. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z_2 = T_2 - 1$.
   Reconnaître une loi usuelle, retrouver l'espérance de T_2 et donner sa variance.

Partie C : Quelques résultats dans le cas général

On retourne au cas général, l'urne contient N boules numérotées de 1 à N.
Pour tout $i \in [\![1;N]\!]$, on note Z_i la variable aléatoire définie par :

$$\begin{cases} Z_1 = 1 & \text{si } i = 1, \\ Z_i = T_i - T_{i-1} & \text{si } i \geqslant 2. \end{cases}$$

La variable aléatoire Z_i donne le nombre de tirages nécessaires, après le T_{i-1}–ième tirage, pour obtenir un numéro distinct des $i-1$ numéros déjà tirés.
On admet que les variable aléatoires $Z_1, \ldots, Z_N$ sont indépendantes.

Décomposition de T_i

9. Soit $i \in [\![2;N]\!]$.
   a) Justifier que Z_i suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{N-i+1}{N}$.
   b) Exprimer $E(Z_i)$ et $V(Z_i)$ en fonction de i et N. Vérifier que ces formules restent vraies pour $i = 1$.
10. Soit $i \in [\![1;N]\!]$. Exprimer T_i comme somme de $Z_1, \ldots, Z_i$.

Loi de T_3

11. a) Calculer $P((Z_2 = \ell) \cap (Z_3 = k))$ pour tous ℓ et k dans $\mathbf{N}^*$.
    b) En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$P(Z_2 + Z_3 = n) \quad = \quad \frac{(N-1)(N-2)}{2} \left(\left(\frac{2}{N}\right)^n - \frac{2}{N^n} \right).$$

    c) Déterminer la loi de T_3.

Espérance et covariance

12. Soit $i \in [\![1;N]\!]$, montrer que $E(T_i) \; = \; N \displaystyle\sum_{k=N-i+1}^{N} \frac{1}{k}$.

$\boxed{\textbf{Fin de l'énoncé}}$