Devoir Python – Suites et Probabilités

Soulignez ou encadrez vos résultats, numérotez les pages. Un malus sera appliqué aux copies non paginées et aux numéros de questions non indiqués.

Exercice 1 – Ecricome Sujet 0 Maths Appliquées

Soit $(F_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par

$$\begin{cases} F_0 = 0, \\ F_1 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n. \end{cases}$$

Partie 1

1. (a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $F_n > 0$ et $F_{n+1} > 0$.
   (b) Montrer que la suite $(F_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement croissante à partir du rang 2.
   (c) Pour tout entier n non nul, donner une expression de F_n uniquement en fonction de n.
   (d) En déduire que $(F_n)_{n\geqslant 0}$ diverge et que $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n = +\infty$.
2. Écrire une fonction Python `fibo(n)` prenant en argument un entier naturel n et renvoyant la valeur de F_n.

   Si on exécute le script Python suivant

```python
L=[]
for k in range(20):
    L.append(fibo(k))
print(L)
```

   on doit obtenir :

   `[0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181]`

3. Écrire une fonction `recherche(x, L)` prenant en entrée :
   — un entier naturel `x`
   — une liste `L` déjà triée dans l'ordre croissant, dont le premier élément est inférieur ou égal à `x` et le dernier est strictement supérieur à `x`

   et qui renvoie le plus grand élément de la liste `L` qui soit inférieur ou égal à `x`.

Partie 2

On s'intéresse dans cette partie au théorème suivant, appelé **Théorème de Zeckendorf**

> Pour tout entier naturel non nul n, il existe un unique entier k et un unique k-uplet d'entiers $(c_1, \dots, c_k)$, verifiant :
>
> ⋆ $c_1 \geqslant 2$
>
> ⋆ pour tout i appartenant à $[\![1, k-1]\!]$, $c_i + 1 < c_{i+1}$,
>
> tels que :
>
> $$n = \sum_{i=1}^{k} F_{c_i},$$
>
> Cette décomposition s'appelle la **décomposition de Zeckendorf** du nombre n.

Par exemple, $n = 4$ se décompose en : $4 = 1 + 3 = F_2 + F_4$. Donc $k = 2$ et $(c_1, c_2) = (2, 4)$.

Par ailleurs, $n = 17$ se décompose en : $17 = 1 + 3 + 13 = F_2 + F_4 + F_7$. Donc $k = 3$ et $(c_1, c_2, c_3) = (2, 4, 7)$.

4. On rappelle que la liste des premiers termes de la suite $(F_n)_{n\geqslant 0}$ a été donnée dans la question 2.
   (a) En remarquant que $6 = 1+2+3 = F_2+F_3+F_4$ et aussi que $6 = 1+5 = F_2+F_5$, donner la décomposition de Zeckendorf de 6 et justifier votre choix.
   (b) Donner la décomposition de Zeckendorf du nombre 35.
   (c) Donner la décomposition de Zeckendorf du nombre 130.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Justifier l'existence d'un entier J supérieur ou égal à 2 tel que $\forall i \geqslant J$, $F_i \geqslant n+1$.
   (b) Notons $A_n = \{i \in \mathbb{N}^*,\ F_i \leqslant n\}$.
   Montrer que $2 \in A_n$ et que A_n contient au plus J éléments.
   (c) Soit alors $j = \max(A_n)$, c'est-à-dire j est le plus grand entier appartenant à A_n.
   Montrer que $j \geqslant 2$ et que
   $$F_j \leqslant n < F_{j+1}.$$
   (d) Démontrer que $n - F_j < F_{j-1}$.
   (e) Supposons qu'il existe un entier k' et un k'-uplet $(c'_1, \dots, c'_{k'})$ d'entiers naturels tels que
   $$c'_1 \geqslant 2, \quad \forall i \in [\![1, k'-1]\!], c'_i + 1 < c'_{i+1} \quad \text{et} \quad n - F_j = \sum_{i=1}^{k'} F_{c'_i}.$$
   Montrer qu'il existe un entier k que l'on exprimera à l'aide de k' et qu'il existe un k-uplet $(c_1, \dots, c_k)$ d'entiers naturels tels que
   $$c_1 \geqslant 2, \quad \forall i \in [\![1, k-1]\!], c_i + 1 < c_{i+1} \quad \text{et} \quad n = \sum_{i=1}^{k} F_{c_i}.$$

6. Que renvoie la fonction suivante ?

```python
def Zeckendorf(n):
    i=0
    L=[fibo(i)]
    while L[-1]<=n:
        i=i+1
        L.append(fibo(i))
    k=n
    T=[]
    while k>0:
        f=recherche(k,L)
        T.append(f)
        k=k-f
    return T
```

Exercice 2 – Ecricome 0 ECT

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :
$$u_1 = \frac{2}{3} \text{ et, } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \frac{n+1}{3n} u_n.$$

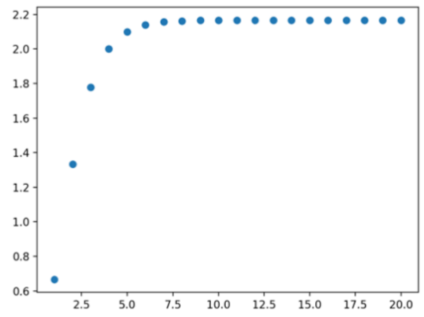
1. (a) Calculer u_2 et u_3.
   Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.
   (b) Compléter la fonction Python ci-dessous qui prend en entrée la valeur n et renvoie la valeur de u_n.

```python
def suite(n):
    u= 2/3
    for k in range(1,n-1):
        u = .........
    return u
```

2. Montrer par récurrence que,
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n > 0.$$

3. (a) Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers un réel ℓ que l'on ne demande pas de calculer ici.

4. On a écrit un script permettant l'affiche des premiers termes de la suite $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$. Quelle conjecture peut-on faire sur la nature de $\sum u_n$?



$n \geqslant 1$

5. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{u_n}{n}$.

   (a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.

   (b) En déduire pour tout entier n non nul, l'expression de v_n en fonction de n.

   (c) Vérifier que la série $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge et montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = 1$.

6. Prouver la conjecture de la 4. et calculer la somme de la série $\sum u_n$.
7. Montrer la convergence et calculer la somme de la série $\sum n u_n$.

Exercice 3

On se place dans le cas d'une infinité de lancers, mutuellement indépendants, d'une pièce équilibrée. Posons P_i (respectivement F_i) l'événement « Faire un Pile (resp. Face) au i-ème lancer » et G_n " une succession d'au moins 3 piles se produit entre le premier et le n-ième lancer. On pose : $\mathrm{A}_1 = \mathrm{F}_1,\ \ \mathrm{A}_2 = \mathrm{P}_1 \cap \mathrm{F}_2,\ \ \mathrm{A}_3 = \mathrm{P}_1 \cap \mathrm{P}_2 \cap \mathrm{F}_3,\ \ \mathrm{A}_4 = \mathrm{P}_1 \cap \mathrm{P}_2 \cap \mathrm{P}_3$.

1 Montrer, en utilisant le système complet ci-dessus, que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{P}(\mathrm{G}_{n+3}) = \frac{1}{2}\mathbf{P}(\mathrm{G}_{n+2}) + \frac{1}{4}\mathbf{P}(G_{n+1}) + \frac{1}{8}\mathbf{P}(G_n) + \frac{1}{8}$$

2 (a) Justifier que la suite $\left(\mathbf{P}(G_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. En déduire la convergence de la suite.
(b) Calculer la limite.
(c) Quelle est la probabilité de faire une succession d'au moins 3 piles dans une infinité de lancers ?

3 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $\mathrm{U}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{P}(\mathrm{G}_n) - 1 \\ \mathbf{P}(\mathrm{G}_{n+1}) - 1 \\ \mathbf{P}(\mathrm{G}_{n+2}) - 1 \end{bmatrix}$.
(a) Trouver une matrice C telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{U}_{n+1} = \mathrm{C}\mathrm{U}_n$.
(b) En déduire une relation simple entre C, U_n et U_0.
(c) Compléter la fonction suivante qui prend en argument n et donne une valeur approchée de $\mathbf{P}(G_n)$.

```
import numpy as np

def proba(n) :
    U=np.array( .... )
    C=np.array( .... )
    for i in range( .... ) :
        U= ....
    u= ....
    print(u+1)
```

Exercice 4

Un mobile se déplace sur le réseau $\mathbb{Z}^2$. Il débute à l'instant 0 à l'origine (0,0), puis à chaque instant il se déplace de aléatoirement de manière uniforme dans l'une des 4 directions (une unité vers le haut, vers le bas, la gauche ou la droite). Pour tout entier naturel n, on note $X_n\ l'abscisse$ du mobile à l'instant n et Y_n son ordonnée.

1. Quelles valeurs possibles peut prendre la variable X_n ?
2. Soit n>2. Calculer $P(X_n = n), P(X_n = n - 1)$ et $P(X_n = n - 2)$.
3. Voici un script.
   On rappelle que la commande rd.random() renvoie de manière aléatoire et uniforme un réel dans l'intervalle]0,1[.

```
X=Y=c=n=0
while c==0:
  a=np.floor(4*rd.random())
  if a==0: X=X+1
  if a==1:X=X-1
  if a==2:Y=Y+1
  if a==3:Y=Y-1
  if X==Y==0: c=1
  n+=1
print(n)
```

(a) Expliquer le fonctionnement de la ligne 3.
(b) Qu'affiche le programme ?
(c) L'exécution du programme peut-elle poser un problème ?

4. Écrire une fonction distance(n) : permettant de renvoyer une simulation de la distance du mobile à l'origine à l'instant n.
5. On note D_n la variable égale au nombre de déplacement vers la droite effectués lors des n premiers instants. Quelle est la loi de D_n ?
6. Exprimer X_n à l'aide de D_n. En déduire $E(X_n)$ et $V(X_n)$.
7. Exprimer, pour tout k, $P(X_{2n} = 0, Y_{2n} = 0, D_{2n} = k)$ (la formule comprend 3 coefficients binomiaux).
8. En déduire la valeur de $P(X_{2n} = 0, Y_{2n} = 0\ )$.

On pourra utiliser la formule de Vandermonde, pour tous a, b, n des entiers avec $n \leq a + b$, alors : $\binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$.