TD : Couples de variables discrètes

1. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et un réel a tels que : $P((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{a}{2^{i+j}}$, pour tous i, j de $\mathbb{N}^*$.
   (a) Déterminer la loi de X en fonction de a. En déduire la seule valeur possible pour le réel a.
   (b) Déterminer la loi de Y.
   (c) X et Y sont-elles indépendantes?

2. Dans une prépa, le nombre d'élèves admissibles à HEC une année, noté X, suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(m)$ où m>0. Un élève admissible a une probabilité p d'être admis, et donc 1-p d'être recalé (on suppose que chaque élève est admis indépendamment des autres). On note Y le nombre d'élèves admis à HEC une année.
   (a) Soient k et n des entiers naturels. Calculer $P_{(X=k)}(Y = n)$.
   (b) En déduire la loi du couple (X, Y).
   (c) Déterminer la loi de Y. (*On obtiendra une loi de Poisson*).

3. Soit X, Y deux variables indépendantes suivant la loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$.
   (a) Déterminer $P(X = Y)$.
   (b) En déduire en utilisant un argument de symétrie la valeur de $P(X \geq Y)$.
   (c) * Déterminer la loi de $X + Y$.

4. Soient X et Y deux variables de Bernoulli indépendantes et de même paramètre $p \in]0,1[$. Soient $U = X + Y$ et $V = X - Y$.
   (a) Déterminer la loi du couple (U, V).
   (b) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire $\rho(U, V)$.
   (c) Les variables U et V sont-elles indépendantes ?

Problème 1 : Loi géométrique – HEC ECE 2010

Soit p un réel de $]\,0,1[$ et $q = 1 - p$. Soit X_1 et X_2 deux variables indépendantes de même loi géométrique de paramètre p.
On pose : $Y = X_1 - X_2, T = \max(X_1, X_2)$ et $Z = \min(X_1, X_2)$.
On rappelle donc (y réfléchir) que $T + Z = X_1 + X_2$ et $T - Z = |X_1 - X_2| = |Y|$.

1 a) Rappeler sans démonstration les valeurs respectives de $V(X_1)$ et de $P([X_1 \leq k])$, pour tout k de $X_1(\Omega)$.
b) Calculer $E(X_1 + X_2), V(X_1 + X_2), E(X_1 - X_2), V(X_1 - X_2)$.
c) Établir la relation : $P([X_1 = X_2]) = \frac{p}{1+q}$

2 a) Montrer que Z suit la loi géométrique de paramètre $1 - q^2$. En déduire $E(Z), V(Z)$ et $E(T)$.
b) Soit k un entier de $\mathbb{N}^*$.Justifier l'égalité : $[Z = k] \cup [T = k] = [X_1 = k] \cup [X_2 = k]$. En déduire la relation suivante : $P(T = k) = 2P(X_1 = k) - P(Z = k)$.
c) Établir la formule : $V(T) = \frac{q(2q^2+q+2)}{(1-q^2)^2}$.

3 a) Préciser $(T - Z)(\Omega)$. Exprimer pour tout j de $\mathbb{N}^*$, l'évènement $[Z = j] \cap [Z = T]$ en fonction des évènements $[X_1 = j]$ et $[X_2 = j]$. En déduire pour tout j de $\mathbb{N}^*$,

l'expression de $P([Z=j]\cap[Z=T])$
b) Montrer que pour tout (j,l) de $(\mathbb{N}^*)^2, P([Z=j]\cap[T-Z=l])=2p^2q^{2j+l-2}$.
c) Montrer que pour tout k de $\mathbb{Z}, P([X_1-X_2=k])=\frac{pq^{|k|}}{1+q}$ (on distinguera trois cas : $k=0, k>0$ et $k<0$).
d) En déduire la loi de la variable aléatoire $|X_1-X_2|$.
e) Établir à l'aide des questions précédentes que les variables Z et $T-Z$ sont indépendantes.

4 a) A l'aide du résultat de la question 10.e, calculer Cov (Z,T). Les variables Z et T sont-elles indépendantes ?
b) Calculer en fonction de q, le coefficient de corrélation linéaire ρ de Z et T.
c) Déterminer la loi de probabilité du couple (Z,T).
d) Déterminer pour tout j de $\mathbb{N}^*$, la loi de probabilité conditionnelle de T sachant l'évènement $[Z=j]$
e) Soit j un élément de $\mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe une variable aléatoire D_j à valeur dans $\mathbb{N}^*$, dont la loi de probabilité est la loi conditionnelle de T sachant l'évènement $[Z=j]$. Calculer $E(D_j)$.

Problème 2 : Poissons – Oral HEC ECE

Soit c un réel strictement positif et soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ définies sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$, telles que :

$$\forall(i,j)\in\mathbb{N}^2, P([X=i]\cap[Y=j])=c\frac{i+j}{i!\,j!}.$$

1. (a) Montrer que pour tout $i\in\mathbb{N}: P(X=i)=c\frac{(i+1)}{i!}$ e. En déduire la valeur de c.
   (b) Montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer.
   (d) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
2. (a) Déterminer la loi de $X+Y-1$.
   (b) En déduire la variance de $X+Y$.
   (c) Calculer la covariance de X et de $X+5Y$. Les variables aléatoires X et $X+5Y$ sont-elles indépendantes ?

Problème 3 : Oral ESCP Calculatoire

Soient λ et p deux réels tels que $\lambda>0$ et $0<p<1$.
On considère le couple de variables aléatoires (X,Y) à valeurs dans $\mathbb{N}^2$, de loi :

$$\forall(k,n)\in\mathbb{N}^2, P(X=n,Y=k)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^n p^k(1-p)^{n-k}}{k!\,(n-k)!} & \text{si } 0\leqslant k\leqslant n\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

1 Vérifier que la relation ci-dessus définit bien une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^2$.
2 Déterminer la loi de X et de Y. X et Y sont-elles indépendantes ?
3 Déterminer la loi conditionnelle de la variable aléatoire Y, sachant $(X=n)$.
4 Soit Z la variable définie par $Z=X-Y$. Déterminer la loi de Z.
5 Les variables aléatoires Y et Z sont-elles indépendantes ?