Corrigé du DS n°7

Exercice 1.

1 - ⓐ $u_2 = \frac{4}{9}$; $u_3 = \frac{2}{9}$.

ⓑ u= (k+1)/(3*k) * u

2 - Initialisation : $u_1 = \frac{2}{3} > 0$.

Hérédité : Supposons $u_n > 0$. Comme $u_{n+1} = \frac{n+1}{3n} u_n$ alors $u_{n+1} > 0$

vu que $\frac{n+1}{3n} > 0$.

Donc par principe de récurrence : $\forall n \geq 1 :$ $u_n > 0$.

3 - Comme $u_n > 0$, étudions $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{3n}$, or $n \geq 1$ donc $3n \geq n+1$

ⓐ d'où $\frac{u_{n+1}}{n} \leq 1$. Ainsi : $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

ⓑ (u_n) est décroissante et minorée par 0 (Q 2.) donc d'après le théorème de la limite monotone : $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers $l \geq 0$.

4 - Il semble que $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ converge vers 2,2, donc que $\sum u_n$ converge.

5- Soit $n \geq 1$: $v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{n+1} = \frac{u_n}{3n} = \frac{1}{3} v_n$.

(a) Donc $(v_n)_{n\geq 1}$ est géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_1 = \frac{u_1}{1} = \frac{2}{3}$.

(b) Donc $v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3^n}$.

(c) $\sum_{n\geq 1} v_n = \sum_{n\geq 1} \frac{2}{3^n}$ est une série géométrique de raison $\frac{1}{3} \in]-1,1[$

donc $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = 2\times\left(\frac{1}{3}\right)^1 \times \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 1$.

6- (a) $\sum_{n\geq 1} u_n = \sum_{n\geq 1} n v_n = \sum_{n\geq 1} n \frac{2}{3^n}$: série géométrique dérivée,

Donc $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 2 \times \frac{1}{(1-\frac{1}{3})^2} = \frac{9}{2}$.

(b) Vu que $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 2.

1_ (a) $(I_3)^2 = I_3$ et $A^2 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = I_3$.

(b) On a aussi $(-I_3)^2 = I_3$ et $(-A)^2 = A^2 = I_3$

donc les 4 matrices I_3, $-I_3$, A et $-A$ sont solutions de : $M^2 = I_3$.

2_ (a) $N^2 = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

(b) $T = \begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} = \lambda I_3 + N$. $(a = \lambda$ et $b = 1)$.

(c) $M^2 = (xI_3 + yN)^2 = xI_3.xI_3 + xI_3yN + yNxI_3 + yNyN$ $I_3^2 = I_3$, $N^2 = 0$.

$= x^2 I_3 + (x+y)N$.

(d) Ainsi $M^2 = T \iff x^2 I_3 + (x+y)N = T$

$$\iff \begin{pmatrix}x^2 & x+y & 0\\0 & x^2 & 0\\0&0&x^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 = \lambda \\ x+y = 1\end{cases} \iff \begin{cases} x = \sqrt{\lambda} \text{ ou } -\sqrt{\lambda} \\ y = 1 - x\end{cases} \quad \text{car } \lambda > 0.$$

Ainsi on a 2 solutions : $x = \sqrt{\lambda}$ et $y = 1 - \sqrt{\lambda}$ ou $x = -\sqrt{\lambda}$ et $y = 1 + \sqrt{\lambda}$.

donc $M = \begin{pmatrix}\sqrt{\lambda} & 1-\sqrt{\lambda} & 0\\0&\sqrt{\lambda}&0\\0&0&\sqrt{\lambda}\end{pmatrix}$ ou $M = \begin{pmatrix}-\sqrt{\lambda} & 1+\sqrt{\lambda} & 0\\0&-\sqrt{\lambda}&0\\0&0&-\sqrt{\lambda}\end{pmatrix}$.

3 _ Le programme calcule $R = P.Q - I$

$S = Q.B.P$

Ainsi $R = 0$ d'où $PQ = I$ donc $\boxed{Q = P^{-1}.}$

et $S = D$ d'où $\boxed{D = QBP}$

4 _ (a) $DM = M^2.M = M^3 = M.M^2 = MD$.

(b) $DMV = MDV = M \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = M \times (-2) V = -2MV$.

(c) On sait que $DMV = -2MV$ d'où : $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2a \\ b \\ 3c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a \\ -2b \\ -2c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a = -2a \\ b = -2b \\ 3c = -2c \end{cases} \Leftrightarrow$ $b = -2b$ et $3c = -2c$

donc $b = 0$ et $c = 0$. Ainsi $MV = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = aV$.

(d) $M^2V = M.MV = M.aV = aMV = a^2V$

et $M^2V = DV = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -2V$

Ainsi $a^2 V = -2V$ donc $a^2 = -2$, ce qui est absurde car $a^2 \geq 0$.

5 _ Ainsi il n'existe pas de matrice M vérifiant $M^2 = D$.

6 _ (a) Si $M^2 = B$ alors $(QMP)^2 = QM\underbrace{PQ}_{= I \text{ car } Q = P^{-1}}MP = QM^2P = QBP$.

$= D$.

(b) Supposons qu'il existe M tq $M^2 = B$ alors $(QMP)^2 = D$

donc QMP est solution de l'équation $M^2 = D$, ce qui est impossible (Q 4.)

Donc $M^2 = B$ n'a pas de solution.

Exercice 3.

1_ $\mathbb{P}(A_1) = 0$ car il faut réaliser au moins 2 tirages.

$\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(N_1 \cap B_2 \cup B_1 \cap N_2)$ incompatibilité et indépendance

$= \mathbb{P}(N_1).\mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(B_1).\mathbb{P}(N_2)$

$= \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{3 \times 2}{5 \times 5} = \frac{12}{25}$.

$\mathbb{P}(A_3) = \mathbb{P}(N_1 \cap N_2 \cap B_3) + \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap N_3) = \frac{30}{125} = \frac{6}{25}$.

2_ Soit $k \geq 2$. $\mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}(A_k \cap N_1) + \mathbb{P}(A_k \cap B_1)$ d'après les probabilités totales

$= \mathbb{P}(N_1 \cap \dots \cap N_{k-1} \cap B_k) + \mathbb{P}(B_1 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap N_k)$

$= \frac{2 \times \dots \times 2 \times 3}{5 \times \dots \times 5} + \frac{3 \times \dots \times 3 \times 2}{5 \times \dots \times 5}$

$= \frac{2^{k-1}.3 + 3^{k-1}.2}{5^k}$.

3_ $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{2^{k-1}.3 + 3^{k-1}.2}{5^k} = \frac{3}{2} \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^k + \frac{2}{3} \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^k$

$= \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 . \frac{1}{1-\frac{2}{5}} + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 . \frac{1}{1-\frac{3}{5}}$ (séries géométriques avec $\frac{2}{5}$ et $\frac{3}{5} \in]-1,1[$)

$= \frac{6}{25} \cdot \frac{5}{3} + \frac{6}{25} \cdot \frac{5}{2} = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$.

Cela signifie que $\sum_{k=2}^{+\infty} P(A_k) = 1$, or $\sum_{k=2}^{+\infty} P(A_k) = P(\bigcup_{k=2}^{+\infty} A_k)$

par incompatibilité des $(A_k)_{k\geq 2}$.

et $\bigcup_{k=2}^{+\infty} A_k$ = "on obtient les 2 boules à un moment"

donc on a montré que cet événement est presque sûr.

$$\text{c-}\quad \sum_{k=2}^{+\infty} k\,P(A_k) = \sum_{k=2}^{+\infty} k \left(\frac{2^{k-1}3 + 3^{k-1}2}{5^k}\right)$$

on ajoute le terme en $k=1$.

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{2^{k-1}3+3^{k-1}2}{5^{k-1}\cdot 5}\right) - 1\left(\frac{2^{1-1}3 + 3^{1-1}2}{5^1}\right)$$

$$= \frac{3}{5}\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1} + \frac{2}{5}\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{3}{5}\right)^{k-1} - 1\cdot\frac{5}{5}$$

séries géométriques dérivées car $\frac{2}{5}$ et $\frac{3}{5} \in]-1,1[$

$$= \frac{3}{5}\times\frac{1}{(1-\frac{2}{5})^2} + \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{(1-\frac{3}{5})^2} - 1$$

$$= \frac{3}{5}\cdot\frac{25}{9} + \frac{2}{5}\cdot\frac{25}{4} - 1 = \frac{5}{3} + \frac{5}{2} - 1$$

$$= \frac{10+15-6}{6} = \frac{19}{6}.$$

Cela correspond au nombre de tirages moyen nécessaire pour obtenir les 2 boules, car $\sum k\,P(A_k)$ est la moyenne pondérée des temps d'attente : $\underbrace{k}_{\text{le nombre de tirage}} \times \underbrace{P(A_k)}_{\text{la probabilité d'en faire } k}$.