Lycée Jacques Decour
ECG1

Devoir surveillé 7, durée 4h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Vous êtes invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de vos calculs. Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Exercice 1

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_1 = \frac{2}{3} \text{ et, } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{n+1}{3n} u_n$$

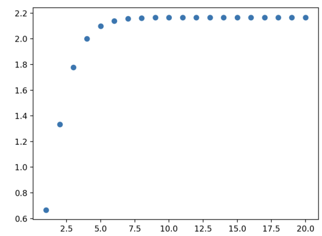
1. (a) Calculer u_2 et u_3. *Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.*
(b) Compléter la fonction Python ci-dessous qui prend en entrée la valeur n et renvoie la valeur de u_n.

```
def suite(n):
    u= 2/3
    for k in range(1,n-1):
        u = .........
    return u
```

2. Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$$

3. (a) Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
(b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers un réel ℓ que l'on ne demande pas de calculer ici.
4. On a tracé à l'aide de Python les premières valeurs de la suite des sommes partielles de série de terme général u_n.



Que peut-on conjecturer à propos de la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$?
5. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{u_n}{n}$.
(a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
(b) En déduire pour tout entier n non nul, l'expression de v_n en fonction de n.
(c) Vérifier que la série $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge et montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = 1$.
6. (a) Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ et sa somme .
(b) Que vaut la limite de (u_n) ?

Exercice 2

1. On note I_3 la matrice identité de $M_3(\mathbf{R})$, définie par $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
(a) Déterminer $(I_3)^2$ et A^2.
(b) En déduire que l'équation $M^2 = I_3$, d'inconnue $M \in M_3(\mathbf{R})$, admet au moins 4 solutions.
2. Soit λ un réel strictement positif.

G. Bignon

On définit les matrices N et T par : $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

(a) Vérifier que $N^2 = 0$.
(b) Déterminer deux réels a et b tels que $T = aI_3 + bN$.
(c) Soient x et y deux réels. On pose $M = xI_3 + yN$. Calculer M^2.
(d) En déduire que l'équation $M^2 = T$, d'inconnue $M \in M_3(\mathbf{R})$, admet exactement deux solutions dans l'ensemble des matrices qui s'écrivent sous la forme $xI_3 + yN$ avec x, y deux réels.

On note $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

3. On considère le script Python suivant :

```
import numpy as np
I=np.eye(3)
B=np.array([[-1,4,-1],[-2,5,2],[0,0,-2]])
P=np.array([[1,2,1],[0,1,1],[1,0,0]])
Q=np.array([[0,0,1],[1,-1,-1],[-1,2,1]])
R=np.dot(P,Q)-I
S=np.dot(Q,np.dot(B,P))
print(R)
print(S)
```

À son exécution, on obtient :

$\left[\ [0.\quad 0.\quad 0.\ \right]$
$\left[\ 0.\quad 0.\quad 0.\ \right]$
$\left[\ 0.\quad 0.\quad 0.]\ \right]$
$\left[\ -2\quad 0\quad 0\ \right]$
$\left[\ 0\quad 1\quad 0\ \right]$
$\left[\ 0\quad 0\quad 3\ \right]$.

Que calcule ce programme ? En déduire l'inverse de P ainsi qu'une relation entre B, P et D.

4. On suppose qu'il existe une matrice M de $M_3(\mathbf{R})$ telle que $M^2 = D$ et on note $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(a) Justifier que $DM = MD$.
(b) Justifier que $DMV = -2MV$.
(c) On note $MV = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Montrer que $-2b = b$ et que $-2c = 3c$.
En déduire que $MV = aV$.
(d) Calculer M^2V de deux manières différentes et aboutir à une contradiction.

5. Que peut-on conclure sur l'équation $M^2 = D$ d'inconnue $M \in M_3(\mathbf{R})$?

6. On admet les conjectures effectuées à la question 3.
(a) Montrer que si une matrice M vérifie l'équation $M^2 = B$, alors on a $(QMP)^2 = D$.
(b) Que peut-on en conclure sur l'équation $M^2 = B$, d'inconnue $M \in M_3(\mathbf{R})$?

Exercice 3

On effectue des tirages avec remise dans une urne contenant trois boules blanches et deux boule noires, jusqu'à l'obtention d'une noire et d'une blanche. On note B_k = "on a obtenu une boule blanche au k ième tirage" ; N_k = "on a obtenu une boule noire au k ième tirage" et A_k = "on a effectué en tout k tirages".

1. Calculer la probabilité de A_k pour k=1, 2 et 3.
2. Prouver que, pour $k \leq 2$ $P(A_k) = \dfrac{2^{k-1}3 + 3^{k-1}2}{5^k}$.
3. Calculer la somme de la série $\sum_{k=2}^{+\infty} P(A_k)$. Interpréter le résultat.
4. Calculer la somme de la série $\sum_{k=2}^{+\infty} kP(A_k)$. Interpréter.

G. Bignon