Étude des couples discrets

1_ Généralités.

Définitions: On appelle couple de variables discrètes un couple (X,Y) où X et Y sont des V.A. discrètes (c-à-d $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont composés d'entiers).

La loi du couple est la donnée des valeurs de :

$P(X=i \cap Y=j)$ pour $i \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$.

exemple: On lance deux dés à 6 faces. On pose $X=$ le n° du premier dé et $Y=$ le plus grand des 2 n°. Déterminer la loi de (X,Y) revient à calculer $P(X=i \cap Y=j)$ pour tout $i \in X(\Omega)=[\![1,6]\!]$ et $j \in Y(\Omega)=[\![1,6]\!]$, donc 36 valeurs !

On a $P(X=1 \cap Y=1)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$; $P(X=2\cap Y=1)=0$; $P(X=1\cap Y=2)=\frac{1}{36}$ etc.

Définition: On dit que X et Y sont indépendantes, noté $X \perp\!\!\!\perp Y$, si :

pour tout $i \in X(\Omega)$ et $j \in Y(\Omega)$ $P(X=i\cap Y=j)=P(X=i)P(Y=j)$.

exemple: Dans l'exemple précédent X et Y ne sont pas indépendantes car pour $i=2$ et $j=1$:

$P(X=2\cap Y=1)=0$ or $P(X=2)=\frac{1}{6}$ et $P(Y=1)=\frac{1}{36}$ donc $P(X=2\cap Y=1)\neq P(X=2)P(Y=1)$

Remarques: . En pratique on note $P(X=i\cap Y=j)=P(X=i, Y=j)$.

. On appelle lois marginales du couple (X,Y) les lois "individuelles" de

X et de Y, c-à-d la donnée de $\mathbb{P}(X=i)$ pour tout $i \in X(\Omega)$, idem pour Y.

Méthode pour obtenir la loi marginale à partir de la loi du couple :

- $\forall i \in X(\Omega) \quad \mathbb{P}(X=i) = \sum_{j \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=i, Y=j)$

  C'est une simple application de la FPT avec le s.c.e. $(Y=j)_{j \in Y(\Omega)}$.

2_ Somme de variables discrètes.

Etant donné un couple (X,Y) et $Z = X+Y$, on calcule la loi de Z en utilisant la FPT avec le sce de X ou de Y.

. $\forall k \in Z(\Omega) \quad \mathbb{P}(Z=k) = \sum_{i \in X(\Omega)} \mathbb{P}(Z=k, X=i)$

$$= \sum_{i \in X(\Omega)} \mathbb{P}(Y=k-i, X=i)$$

Penser à trouver $Z(\Omega)$ à l'avance

Proposition : Soient $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m,p)$ indépendantes, alors $X+Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n+m,p)$

Preuve : X compte les succès lors de n exp de Bernoulli indépendantes et identiques (succès de proba p), Y fait de même pour m exp, donc comme X et Y sont indépendantes, $X+Y$ compte les succès des $n+m$ exp de Bernoulli (où succès de proba p).

Donc $X+Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n+m,p)$.

Proposition : Soient $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ indépendantes, alors $X+Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda+\mu)$.

Preuve : Comme X, Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, $X+Y$ aussi, soit donc $k \in \mathbb{N}$:

$$P(X+Y=k) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(X+Y=k \cap X=i) \qquad \text{FPT sce } (X=i)_{i\geq 0}$$

$$= \sum_{i=0}^{+\infty} P(Y=k-i \cap X=i) \qquad Y(\Omega)=\mathbb{N}, \text{ donc si } k-i<0, \ P(Y=k-i)=0$$

indépendance de X et Y

$$= \sum_{i=0}^{k} P(Y=k-i)\,P(X=i)$$

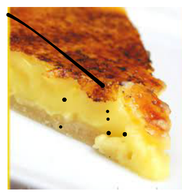
$$= \sum_{i=0}^{k} e^{-\mu} \frac{\mu^{k-i}}{(k-i)!} \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} = \frac{e^{-(\mu+\lambda)}}{k!} \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!} \mu^{k-i} \lambda^i$$

Binôme de Newton

$$= \frac{e^{-(\mu+\lambda)}}{k!} (\mu+\lambda)^i .$$

Méthode pour $\max(X,Y)$ et $\min(X,Y)$:

Voici les ingrédients nécessaires à la confection de cette délicieuse tarte à la mémé :



- $(\max(X,Y) \leq k) = (X \leq k \cap Y \leq k)$
- $(\min(X,Y) \geq k) = (X \geq k \cap Y \geq k)$

du bon sens

- $(X \geq k) = (X \geq k+1) \sqcup (X=k)$

ou encore $(X \leq k) = (X=k) \sqcup (X \leq k-1)$ ....

3_ Espérance et covariance.

Théorème (de transfert) : Soient (X,Y) un couple discret.

XY admet une espérance ssi $\displaystyle\sum_{i\in X(\Omega)} \sum_{j \in Y(\Omega)} ij\, P(X=i, Y=j)$ CVA

Remarque : Peu utile en pratique. On ne rentrera d'ailleurs pas dans les détails de ce que signifie la CV d'une série double.

Proposition : Si X et Y sont indépendants et admettent des espérances alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Remarque : On n'a pas $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(X)^2$ car X est rarement indépendant de lui même.
(On peut montrer que $X \perp\!\!\!\perp X$ ssi X suit une loi certaine).

Définition : Soient X et Y des variables discrètes admettant chacune un moment d'ordre 2.
On définit la covariance de X et Y par :

$$\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y)) \big)$$

Proposition :
- $\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X).\mathbb{E}(Y)$ (Huygens)
- $\mathrm{cov}(X,X) = \mathbb{V}(X) \geq 0$ (Positivité)
- $\mathrm{cov}(X,Y) = \mathrm{cov}(Y,X)$ (Symétrie)
- $\mathrm{cov}(aX + bY, Z) = a\,\mathrm{cov}(X,Z) + b\,\mathrm{cov}(Y,Z)$ (Linéarité à droite)
- $\mathrm{cov}(X, aY + bZ) = a\,\mathrm{cov}(X,Y) + b\,\mathrm{cov}(X,Z)$ (Linéarité à gauche).

Proposition :
- $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + 2\,\mathrm{cov}(X,Y) + \mathbb{V}(Y)$
- Si X et Y sont indépendants alors $\mathrm{cov}(X,Y) = 0$.

Définition : On définit le coefficient de corrélation linéaire de X et Y par :

$$\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathbb{V}(X).\mathbb{V}(Y)}}.$$

Proposition (Cauchy-Schwarz) :

- $\rho_{X,Y} \in [-1,1]$
- $\rho_{X,Y} = \pm 1$ ssi X est une fonction affine de Y

Preuve : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $\mathbb{V}(X+\lambda Y) \geq 0$ (c'est une variance)

or $\mathbb{V}(X+\lambda Y) = \mathbb{V}(X) + 2\lambda \,\mathrm{cov}(X,Y) + \lambda^2 \mathbb{V}(Y)$ ← trinôme en λ.

Le discriminant vaut $(2\,\mathrm{cov}(X,Y))^2 - 4\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)$, or ce trinôme est toujours ≥ 0 donc il a au plus une racine donc le discriminant est ≤ 0 :

$$\mathrm{cov}(X,Y)^2 \leq \mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y).$$

$$\iff \rho_{X,Y}^2 \in [0,1] \iff \rho_{X,Y} \in [-1,1].$$

Remarquons de plus que $\rho_{X,Y} = \pm 1 \iff \rho_{X,Y}^2 = 1 \iff$ discriminant nul $\iff \exists$ une racine

$\iff \exists \lambda_0 \in \mathbb{R} \mid \mathbb{V}(X+\lambda_0 Y) = 0 \iff \exists \lambda_0 \in \mathbb{R} \mid \exists a \in \mathbb{R} \mid X + \lambda_0 Y = a$

$\iff X = -\lambda_0 Y + b$ ← X est une fonction affine de Y !