Le jeu de mémory est composé de n (n étant un entier naturel non nul) paires d'images deux à deux distinctes, sur une seule des n paires sont représentés des chatons. Ces images sont réparties en deux tas : chaque paire aura une de ses images dans chaque tas. Les images sont posées face cachée. A chaque étape, une carte de chaque tas est retournée. Si les deux cartes retournées forment la paire de chatons, alors le jeu s'arrête, sinon les cartes sont retournées et les tas à nouveau mélangés.
Deux joueurs A et B jouent en parallèle. Ils possèdent chacun leur propre jeu de mémory et jouent indépendamment, mais réalisent leurs étapes en même temps. Soit X (respectivement Y) le nombre d'étapes de jeu effectuées par le joueur A (respectivement B) lorsqu'il trouve la paire de chatons. Soit $M = \max(X, Y)$. On admet que M est une variable aléatoire.

1. **Question de cours :** Énoncer la définition de l'espérance d'une variable aléatoire discrète.
2. Donner la loi de X, son espérance et sa variance
3. Pour tout entier naturel k, déterminer $\mathbb{P}(M \leqslant k)$.
4. Montrer que la série $\sum_{k \geqslant 0} \mathbb{P}(M > k)$ converge.
5. Montrer que pour tout entier naturel K non nul, $\sum_{k=1}^{K} k\mathbb{P}(M = k) = -K\mathbb{P}(M > K) + \sum_{k=0}^{K-1} \mathbb{P}(M > k)$.
6. En déduire que M admet une espérance.
7. Montrer que la suite $\left(K\, \mathbb{P}(M > K)\right)_{K \geqslant 0}$ converge vers 0.
8. Déterminer $\mathbb{E}(M)$.

Soit $\mathcal{S}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles.

Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum a_n$ converge.

1. Question de cours.
   Rappeler les conditions de convergence des séries géométriques, géométriques dérivées et des séries exponentielles. En cas de convergence, rappeler la valeur de la somme de ses séries.

2. (a) La suite $A_1 = \left(\frac{1}{n!}\right)$ appartient-elle à $\mathcal{C}$?
   (b) La suite $A_2 = ((-1)^n)$ appartient-elle à $\mathcal{C}$?
   (c) Montrer que $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}$.

Pour toute suite $A = (a_n) \in \mathcal{S}$, on dit que la suite $A = (a_n)$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$ si

(i) pour tout $x \in]-1, 1[$, la série $\sum a_n x^n$ converge.

(ii) $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ admet une limite finie lorsque x se rapproche de 1 par valeurs inférieures.
On note alors

$$\ell(A) = \lim_{x\to 1-} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) \in \mathbb{R}.$$

3. (a) La suite $A_1 = \left(\frac{1}{n!}\right)$ vérifie-t-elle la propriété $\mathcal{P}$? Si oui, déterminer $\ell(A_1)$.
   (b) La suite $A_2 = ((-1)^n)$ vérifie-t-elle la propriété $\mathcal{P}$? Si oui, déterminer $\ell(A_2)$.
   (c) Soit $A_3 = (n^2)$ vérifie-t-elle la propriété $\mathcal{P}$? Si oui, déterminer $\ell(A_3)$.
4. Soit $A = (a_n)$ une suite de $\mathcal{S}$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geqslant 0$ et que la suite vérifie la propriété $\mathcal{P}$.
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} a_k \leqslant \ell(A)$.
   (b) En déduire que la suite A appartient à $\mathcal{C}$.
5. Soit $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_{n+3} = a_n.$$

   (a) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit dans $\mathcal{C}$.
   (b) Montrer que la suite A vérifie la propriété $\mathcal{P}$ si et seulement si $a_0 + a_1 + a_2 = 0$.