Deux joueurs A et B s'affrontent dans un jeu de la manière suivante :
A joue le premier et jette deux dés : si la somme des points obtenus est 5, A gagne.
Le jeu cesse alors.
Sinon, B joue à son tour et jette deux dés : si la somme des points obtenus est 7, B gagne.
Le jeu cesse alors.
Sinon, le tour revient à A et on poursuit comme ci-dessus jusqu'à ce que A ou B ait gagné.

1. Question de cours : formule des probabilités composées.

2. a) Déterminer la probabilité pour que la somme des points lors du jet de deux dés soit égale à 5.
   b) Déterminer la probabilité pour que la somme des points lors du jet de deux dés soit égale à 7.

3. a) Déterminer la probabilité pour que A gagne au $(2n+1)^{\text{ième}}$ jet des deux dés ($n \geq 0$).
   b) Déterminer la probabilité pour que B gagne au $(2n+2)^{\text{ième}}$ jet des deux dés ($n \geq 0$).

4. En déduire les probabilités a et b pour que A et B gagnent le jeu.

5. Soit N la variable aléatoire égale au nombre de jets de deux dés pour que le jeu s'arrête.
   Montrer que N admet une espérance et la déterminer.

---

2. Déterminer l'ensemble D des réels x tels que $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} > 0$.

   On définit la fonction
   $$f : \begin{cases} D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right) \end{cases}$$
   On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

3. (a) Sans chercher à le calculer, prouver l'existence d'un unique réel α vérifiant $f(\alpha) = 0$ et montrer que $\alpha < 1$.
   (b) Compléter le programme SCILAB suivant permettant d'avoir une valeur approchée par défaut de α à 0.01 près.

```
 a=  0;
 b=  1;
while
    if
    then b=(a+b)/2;
    else a=(a+b)/2;
    end;
end;
 disp(a)
```

   (c) Calculer la valeur explicite de α.

4. (a) Donner la position relative de la droite (Δ) d'équation $y = x$ par rapport à (C).
   (b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x)$ et tracer sur un même graphe la courbe (C) et la droite (Δ)

Soit n un entier $\geqslant 6$. Les n cadres d'une entreprise soit s'apprécient mutuellement, soit se détestent mutuellement. On peut schématiser la situation par un graphe non orienté simple dont les sommets « sont » les cadres et où les arêtes matérialisent les relations d'estime réciproque. Ici, ne pas s'estimer mutuellement équivaut à se détester mutuellement.

1. Chaque cadre dresse la liste des collègues qu'il apprécie.
   (a) Montrer que si on fait deux tas selon la parité de chaque liste, celui des listes contenant un nombre impair de noms contient un nombre pair de listes.
   (b) Montrer qu'il existe au moins deux listes ayant le même nombre de noms.

2. Pour mesurer l'impact des affinités sur le travail d'équipe, le DRH veut former un groupe de travail homogène de 3 de ces cadres. Montrer qu'il peut toujours soit réunir 3 personnes qui s'apprécient mutuellement, soit réunir 3 personnes qui se détestent mutuellement.