

Soit la relation de récurrence : $(\mathcal{R}) \begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{pour } n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n - 4 + e^{u_n} \end{cases}$

1. **Cours.** Théorème de la limite monotone pour une suite.
2. Montrer que (\mathcal{R}) définit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, que cette suite est décroissante, et qu'elle tend vers $-\infty$.
3. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 1 - 4n + \sum_{k=0}^{n-1} e^{u_k}$.
En déduire : $1 - 4n \leq u_n \leq e - 3n$.
- (b) Montrer que la somme $\sum_{k=0}^{n-1} e^{u_k}$ est majorée par la constante $\frac{e^e}{1 - e^{-3}}$.
4. (a) Déterminer une suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général de la forme $w_n = c \cdot n^p$, avec $c \in \mathbb{R}^*$ et $p \in \mathbb{Z}$, telle que les suites $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soient équivalentes quand n tend vers $+\infty$.
- (b) Montrer que pour $n \geq 700$, $\left| \frac{u_n}{w_n} - 1 \right| < 10^{-2}$.
- (c) Compléter le programme Python ci-dessous pour qu'il donne le plus petit entier naturel n tel que $\left| \frac{u_n}{w_n} - 1 \right| < 10^{-2}$.

Programme Python.

```

from numpy import exp, abs

u=-3+exp(1)
n=1

while ..... >= .01 :
    u=.....
    n+=1
print(n)

```

Soit $p \in]0, 1[$. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) indépendantes et de même loi donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X_n = -1) = p, \text{ et } P(X_n = 1) = 1 - p$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Z_n = \prod_{i=1}^n X_i$.

1. Calculer l'espérance $E(Z_n)$ de Z_n et $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(Z_n)$.
 2. Quelle est la loi de Z_n ?
 3. Pour quelles valeurs de p , les variables aléatoires Z_1 et Z_2 sont-elles indépendantes ?
-

Soit la fonction Python `mystere(M,n)` prenant en entrée la matrice d'adjacence M d'un graphe non orienté et un entier naturel non nul n égal à son ordre (nombre de sommets). Les sommets sont les entiers naturels de 0 à $n - 1$. La matrice M est représentée par un tableau numpy et l'accès à l'élément d'indice i, j est réalisé par `M[i, j]`

```

def mystere(M,n):
    i = 0
    j = 0
    while i < n and j < n:
        if i == j:
            i = i+1
        else:
            if M[i,j] == 1:
                j = j+1
                i = 0
            else:
                i = i+1
    return j

```

Que renvoie cette fonction ?