

Soit D la matrice définie par : $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AD = DA$.
 2. En déduire les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui vérifient $M^3 - 2M = D$.
-

Soit a un paramètre réel et F la fonction définie sur \mathbb{R} , à valeurs réelles, telle que :

$$F(x) = \begin{cases} 1 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) & \text{si } x \geq a \\ 0 & \text{si } x < a \end{cases}$$

- 2.a) Montrer que F est continue sur \mathbb{R} si et seulement si $a = \frac{1}{e-1}$.
 - b) Étudier les variations de F et tracer l'allure de sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.
-

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) , de même loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $W_n = \sum_{k=1}^n kX_k$.

1. Calculer $E(W_n)$ et $V(W_n)$.
 2. Les variables aléatoires W_n et W_{n+1} sont-elles indépendantes ?
-

1. Question de cours : Convexité d'une fonction définie sur un intervalle de \mathbb{R} .

2.a) Justifier que $\forall x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_0^x e^{t^2} dt$ est convergente. On pose : $f(x) = \int_0^x e^{t^2} dt = \int_0^x \exp(t^2) dt$.

b) Montrer que f est de classe C^2 sur \mathbb{R} . Étudier la parité et la convexité de f .

c) Étudier les variations de f sur \mathbb{R} et tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan.

3.a) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'existence d'un unique réel u_n vérifiant $f(u_n) = \frac{1}{n}$.

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et convergente.

c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

4.a) Établir pour tout $u \in [0, \ln 2]$, l'encadrement : $1 + u \leq e^u \leq 1 + 2u$.

b) En interprétant le résultat de la question 3.c), en déduire qu'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout

$n \geq n_0$, on a : $\int_0^{u_n} (1+t^2) dt \leq \frac{1}{n} \leq \int_0^{u_n} (1+2t^2) dt$.

c) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n u_n^3 = 0$ et en déduire un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.