

# Révisions. Algèbre linéaire : espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ et matrices

## I. COURS

### Exercice 1. (Rang, noyau et théorème du rang)

**C'est du cours !**

Rappeler la définition du rang et du noyau d'une matrice carrée  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Énoncer le théorème du rang.

Déterminer le rang et le noyau des matrices suivantes :

$$(a) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (d) \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad (e) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

### Exercice 2. (Calculs d'inverse)

**C'est du cours !**

Donner quatre techniques pour démontrer qu'une matrice est inversible.

Déterminer, lorsqu'il existe, l'inverse des matrices suivantes :

$$(a) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (d) I_3 - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

### Exercice 3. (Familles libres, familles liées)

**C'est du cours !**

Rappeler la définition d'une famille libre, d'une famille génératrice et d'une base d'un espace vectoriel  $E$  (par exemple  $E = \mathbb{R}^n$ ).

- (1) Soit  $E$  un espace vectoriel et  $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_k)$  une famille de  $k$  vecteurs ( $k \in \mathbb{N}^*$ ).
  - (a) Que peut-on dire de  $\mathcal{F}$  si  $k > \dim(E)$  ?
  - (b) Que peut-on dire de  $\mathcal{F}$  si  $k < \dim(E)$  ?
  - (c) Que peut-on dire de  $\mathcal{F}$  si  $k = \dim(E)$  et si  $\mathcal{F}$  est libre ?
- (2) **cas**  $E = \mathbb{R}^n$  :
  - (a) Démontrer que la famille  $u_1 = (1, 0, 1, 1)$ ,  $u_2 = (0, 0, 1, 0)$ ,  $u_3 = (1, 1, 1, 1)$  est libre. Donner la dimension et une base de  $F = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$ .
  - (b) Démontrer que la famille  $v_1 = (1, 1/2, 1/3)$ ,  $v_2 = (1/3, 1/2, 1)$ ,  $v_3 = (-1, -1, -1)$  est liée. Donner une base de  $G = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3)$ .

(3) **cas**  $E = \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  :

(a) Rappeler la dimension et donner une base de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

(b) Démontrer que la famille  $I_3, M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  est libre.

Décrire la forme des matrices de  $H = \text{Vect}(I_3, M_1, M_2)$ .

## II. RÉFLEXION : EXTRAITS PROGRESSIFS ADAPTÉS DE CONCOURS

**Exercice 4. (ESC 2000 - exercice 2, partie A)**

Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ . On note  $E$  l'ensemble des matrices de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telles que :

$$M = xA + yA^2 + zA^3 \text{ avec } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

(1) Calculer  $A^2$  et  $A^3$ .

(2) Établir que  $A, A^2$  et  $A^3$  forment une famille libre de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

(3) Justifier que  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ . En donner une base ainsi que sa dimension.

**Exercice 5. (Classique : le commutant)**

Soient  $A, D$  et  $P$  les trois matrices carrées d'ordre 3 définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

On rappelle la définition du commutant :

### Définition

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On appelle **commutant de  $A$** , noté  $\mathcal{C}_A$ , l'ensemble des matrices qui commutent avec  $A$ , c'est-à-dire l'ensemble :

$$\mathcal{C}_A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$$

(1) Démontrer que  $\mathcal{C}_A$  est un espace vectoriel en revenant à la définition.

(2) Montrer que  $P$  est inversible et que  $A = PDP^{-1}$ .

(3) En déduire que :  $M \in \mathcal{C}_A \iff P^{-1}MP \in \mathcal{C}_D$ .

(4) Montrer que  $\mathcal{C}_D$  est l'ensemble des matrices diagonales de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ , en résolvant l'équation  $MD = DM$  d'inconnue  $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

(5) Montrer que toute matrice diagonale de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  est combinaison linéaire de  $I_3, D$  et  $D^2$ .

(6) En déduire la dimension ainsi qu'une base de  $\mathcal{C}_A$ .

**Exercice 6. (★ Un problème sur les matrices productives - adapté d'un oral)**

Dans tous le problème,  $n$  désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Une matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est dite **positive** lorsque tous ses coefficients sont positifs (ou nuls), et on notera alors  $M \succeq 0$ .

Une matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est dite **strictement positive** lorsque tous ses coefficients sont strictement positifs, et on notera alors  $M \succ 0$ .

La notation  $M \succeq N$  (resp.  $M \succ N$ ) signifiera  $M - N \succeq 0$  (resp.  $M - N \succ 0$ ).

Une matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est dite **productive** lorsque :

- $M$  est positive.
- il existe une matrice positive  $P \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  telle que  $P \succ MP$ .

(1) En considérant  $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , montrer que la matrice  $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  est productive.

(2) Montrer que la matrice  $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  n'est pas productive.

Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

(3) Montrer l'équivalence :  $M \succeq 0 \iff \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), (X \succeq 0 \implies MX \succeq 0)$

(4) Soient  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice productive et  $P = (p_i) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  une matrice positive telles que  $P \succ AP$ .

(i) Montrer que  $P \succ 0$ .

(ii) Soit  $X = (x_i) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  telle que  $X \succeq AX$ . On note  $c = \min\{\frac{x_j}{p_j} \mid j \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$  et  $k$  un indice en lequel ce minimum est atteint, c'est-à-dire  $c = \frac{x_k}{p_k}$ .

Établir que  $c(p_k - \sum_{j=1}^n a_{kj}p_j) \geq 0$ . En déduire que  $c \geq 0$  puis que  $X$  est positive.

(iii) Soit désormais  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  telle que  $X = AX$ .

Justifier pourquoi  $-X \succeq -AX$ , puis montrer que  $X$  est nulle.

En déduire que  $I_n - A$  est inversible.

(iv) Montrer que :  $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), (X \succeq 0 \implies (I_n - A)^{-1}X \succeq 0)$ .

En déduire que  $(I_n - A)^{-1}$  est positive.

(5) Dans cette question, on considère une matrice positive  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $I_n - B$  soit inversible et telle que  $(I_n - B)^{-1}$  soit positive. On note  $V = (I_n - B)^{-1}U$  où  $U$  est la matrice colonne de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  dont tous les coefficients valent 1.

Montrer que  $V \succ BV$ . Conclure quant à la matrice  $B$ .

(6) Donner une caractérisation des matrices productives.

(7) *Application* : Soit  $M$  une matrice positive telle que  $2M^2 = M$ . Vérifier que  $(I_n - M)(I_n + 2M = I_n)$  et en déduire que  $M$  est productive.

**Exercice 7. (★ Un endomorphisme avec la trace - adapté d'emlyon)**

On rappelle que  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels et que la

famille  $\mathcal{B} = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$  est une base de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

Pour toute matrice  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , on appelle **trace de  $M$** , notée  $\text{Tr}(M)$ , le réel défini par :  $\text{Tr}(M) = a + d$ .

Soit  $J$  une matrice non nulle de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . On définit alors l'application  $f$  sur  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), f(M) = M + \text{Tr}(M)J$$

1) a) Montrer que l'application trace  $\text{Tr} : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  est une application linéaire.

b) Déterminer une base du noyau de l'application linéaire  $\text{Tr}$  et vérifier que  $\dim(\text{Ker}(\text{Tr})) = 3$ .

c) En déduire que  $\text{Tr}$  est surjective.

d) Démontrer que, pour toute matrice  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , on a l'identité :  $M^2 - \text{Tr}(M)M + \det(M)I_2 = 0_2$ .

2) Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

3) Dans cette question **uniquement**, on considère le cas où  $J = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

a) Démontrer que  $f(E_{11}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , puis calculer de même  $f(E_{12})$ ,  $f(E_{21})$  et  $f(E_{22})$ .

b) En déduire que la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  est la matrice canoniquement associée à  $f$ .

c) Vérifier que  $(A - I_4)^2 = 0_4$ .

- d) En déduire que la matrice  $A$  est inversible et déterminer son inverse  $A^{-1}$ .  
Qu'en déduit-on quant à l'endomorphisme  $f$  ?
- 4) On revient au cas général où  $J$  désigne une matrice quelconque non nulle de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . L'objectif de ces questions est d'établir quelque identités utiles sur  $f$ .
- a) Résoudre l'équation  $f(M) = M$  d'inconnue  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  et en déduire que  $\dim(\text{Ker}(f - \text{id}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})})) = 3$ .
- b) Montrer que l'équation  $f(J) = \lambda J$  possède pour unique solution  $\lambda = 1 + \text{Tr}(J)$ .
- 5) On cherche désormais une condition nécessaire et suffisante afin que  $f$  soit bijective.
- a) On suppose ici que  $\text{Tr}(J) = 0$ .
- (i) On suppose par l'absurde qu'il existe  $\lambda \neq 1$  tel que l'équation  $f(M) = \lambda M$  possède au moins une solution non nulle notée  $M_0$ . Montrer qu'alors  $\text{Tr}(M_0) = 0$ , puis en déduire une contradiction d'après 4a).
- (ii) En déduire que  $\text{Ker}(f) = \{0_2\}$ .
- b) On suppose ici que  $\text{Tr}(J) = -1$ . A l'aide de la question 4b), justifier que  $\text{Ker}(f) \neq \{0_2\}$ .
- c) On suppose ici que  $\text{Tr}(J) \notin \{-1; 0\}$ .
- (i) On note  $(A_1, A_2, A_3)$  une base de  $\text{Ker}(f - \text{id}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})})$ . Démontrer soigneusement que la famille  $\mathcal{B}' = (A_1, A_2, A_3, J)$  forme une base de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
- (ii) En déduire  $\text{Ker}(f)$ .  
*On pourra choisir une matrice  $M$  y appartenant et la décomposer dans la nouvelle base  $\mathcal{B}'$  comme  $M = a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 + a_4 J$ .*
- d) Conclure.