

Révisions. Analyse : équations différentielles, intégrales, suites et fonctions

I. COURS

Exercice 1. (Equations différentielles)

C'est du cours !

Rappeler l'ensemble des solutions des équations différentielles homogènes $y' + ay = 0$ et $y'' + ay' + by = 0$ en fonction des réels a, b, c .

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$(a) y' + 2y = 0 \quad (b) y' - y = e^x \quad (c) y'' - 3y' + y = x$$

Exercice 2. (Écricome 2005 - un exercice très proche du cours sur l'intégration)

C'est du cours !

Rappeler le théorème de l'intégration par parties.

On considère, pour tout entier naturel n , l'application φ_n définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_n(x) = (1 - x)^n e^{-2x}$$

ainsi que l'intégrale $I_n = \int_0^1 \varphi_n(x) dx$.

On se propose de démontrer l'existence de trois réels a, b, c tels que

$$I_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{1}{n^2} \varepsilon(n) \quad \text{avec} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon(n) = 0$$

- (1) Calculer I_0, I_1 .
- (2) Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- (3) Déterminer le signe de I_n pour tout entier naturel n .
- (4) Qu'en déduit-on pour la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
- (5) Majorer la fonction $g : x \mapsto e^{-2x}$ sur $[0, 1]$.
- (6) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.
- (7) Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
- (8) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 2I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n$$

- (9) En déduire la limite de la suite $(nI_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
- (10) Déterminer la limite de la suite $(n(nI_n - 1))_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
- (11) Donner alors les valeurs de a, b, c .

II. RÉFLEXION : EXTRAITS PROGRESSIFS ADAPTÉS DE CONCOURS

Exercice 3. (★ Un problème très complet - d'après emlyon 2024 - exercice 1)

Les parties B et C sont indépendantes de la partie A.

(1) Partie A : résolution d'un système différentiel.

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad x'(t) = -x(t) + e^{-t}$$

où x est une fonction définie et dérivable sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} .

- (a) (i) Résoudre l'équation différentielle homogène $x'(t) = -x(t)$ sur \mathbb{R} .
 (ii) Déterminer une solution particulière x_0 de (E) de la forme $t \mapsto (at + b)e^{-t}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
 (iii) Résoudre l'équation différentielle (E).

On s'intéresse maintenant au système différentiel :

$$(S) : \begin{cases} x'(t) = -x(t) + y(t) \\ y'(t) = -y(t) \end{cases}$$

où x, y désignent des fonctions définies et dérivables sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} .

- (b) (i) Donner la matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que :

$$(S) \iff X'(t) = AX(t) \text{ avec } X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

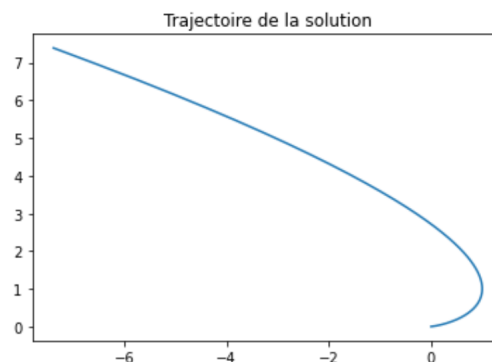
- (ii) On admet qu'il existe une unique solution de (S) telle que $x(0) = 0$ et $y(0) = 1$. Déterminer cette solution en s'aidant de la question (a).
 (iii) Étudier la convergence de la solution (x, y) vers un état d'équilibre lorsque t tend vers $+\infty$.
 (c) Recopier et compléter le programme Python ci-dessous de manière à ce qu'il produise le graphique sur la droite représentant la trajectoire $t \mapsto (x(t), y(t))$ pour $t \in [-2, 10]$.

On rappelle que la commande `np.linspace(-2, 10, 200)` crée une liste de 200 valeurs régulièrement espacées allant de -2 à 10 .

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

T = np.linspace(-2, 10, 200)
x = [ ... for t in T ]
y = [ ... for t in T ]

plt.title("Trajectoire de la solution")
plt.plot( ... )
plt.show()
```

**(2) Partie B : Étude d'une suite de fonctions.**

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_k définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_k(x) = (x + 1)e^{kx}$$

On note \mathcal{C}_k la courbe représentative de f_k dans le plan muni d'un repère orthonormé.

- (a) (i) Calculer les limites de la fonction f_k en $-\infty$ et $+\infty$.
 (ii) Dresser le tableau de variations de f_k en y faisant figurer les valeurs prises par f_k en -1 et en 0 .
 (b) Étudier la position relative des courbes \mathcal{C}_k et \mathcal{C}_{k+1} . Préciser les points d'intersection.
 (c) Dessiner sur un même graphique l'allure de \mathcal{C}_k et de \mathcal{C}_{k+1} .

(3) Partie C : Étude d'une suite implicite.

- (a) (i) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_k(x) = k$ admet une unique solution dans \mathbb{R} notée u_k .
 (ii) Déterminer explicitement u_1 .

(b) Montrer que pour tout entier $k \geq 1$, on a :

$$0 \leq u_k \leq \frac{\ln(k)}{k}$$

En déduire que la suite (u_k) converge et donner sa limite.

(c) (i) Soit $k \geq 1$. Montrer que : $u_k = \frac{\ln(k)}{k} - \frac{\ln(u_k + 1)}{k}$

(ii) En déduire que $u_k \sim \frac{\ln(k)}{k}$ lorsque k tend vers $+\infty$.

indication/définition : cela revient à prouver que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{ku_k}{\ln(k)} = 1$.

(d) On cherche à déterminer la nature de $\sum_{k \geq 1} u_k$.

(i) En revenant à la définition de la limite, démontrer qu'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $\frac{\ln(n)}{2n} \leq u_n$.

(ii) En déduire la nature de $\sum_{k \geq 1} u_k$.

Exercice 4. (★ Equations différentielles cachées) - d'après EDHEC 2024

On se propose ici de déterminer s'il existe des fonctions f continues sur \mathbb{R} vérifiant l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 1 + \int_0^x t f(x-t) dt \quad (*)$$

(1) Montrer que l'égalité (*) est équivalente à l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 1 + \int_0^x (x-u) f(u) du \quad (**)$$

(2) On suppose dans cette question qu'une fonction f , continue sur \mathbb{R} , est solution de ce problème.

(a) Justifier que f est de classe \mathcal{C}^1 et que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \int_0^x f(u) du$$

(b) En déduire que f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} et que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = f(x)$$

(c) Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle obtenue ci-dessus.

(d) Déterminer $f(0)$ et $f'(0)$ puis montrer que le problème posé au début de cet exercice a au plus une solution qui est la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

(3) Vérifier qu'effectivement la fonction trouvée à la question (2).(d) est la seule solution du problème proposé au début de cet exercice.

(4) On se propose de déterminer maintenant s'il existe des fonctions f continue sur \mathbb{R} et vérifiant l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^x t f(x-t) dt$$

Sans refaire les calculs faits précédemment, mais en précisant les résultats qui restent valables, montrer que ce nouveau problème possède une seule solution que l'on déterminera.

Exercice 5. (★ Une fonction définie par une intégrale) - type EDHEC

On considère la fonction f qui à tout réel x associe : $\int_0^x \ln(1+t^2) dt$.

1) a) Déterminer le signe de $f(x)$ en fonction de x .

b) Justifier que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- c) En déduire les variations de f sur \mathbb{R} (on ne cherchera pas à calculer les limites de f).
- 2) a) Montrer que f est impaire.
 b) Étudier la convexité de f et donner les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
- 3) a) Déterminer les réels a et b tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \frac{t^2}{t^2 + 1} = a + \frac{b}{1 + t^2}$$

- b) En déduire, grâce à une intégration par parties, que pour tout réel x :

$$f(x) = x(\ln(1 + x^2) - 2) + 2 \int_0^x \frac{1}{1 + t^2} dt$$

- 4) Comportement de f au voisinage de $+\infty$.

- a) Démontrer que pour tout $t \geq 1$, $\frac{1}{1 + t^2} \leq \frac{1}{t^2}$.

- b) En déduire qu'il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout $x \geq 1$, $\int_0^x \frac{1}{1 + t^2} dt \leq c + 1$.

Que peut-on dire de la limite éventuelle de $x \mapsto \int_0^x \frac{1}{1 + t^2} dt$ lorsque x tend vers $+\infty$?

- c) En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x \ln(1 + x^2)} = 1$.

- d) Vérifier que, pour tout $x > 0$, $\ln(1 + x^2) = 2 \ln(x) + \ln(1 + \frac{1}{x})$. En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{2x \ln(x)} = 1$.

- e) Que dire du comportement asymptotique de f au voisinage de $-\infty$? (*aucun calcul n'est ici attendu*)

- 5) Comportement de f au voisinage de 0

- a) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^3 sur \mathbb{R} .

On admet la formule suivante, appelée *formule de Taylor-Young* à l'ordre 3 au voisinage de zéro : il existe une fonction ε telle que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0 \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f^{(3)}(0) + x^3 \varepsilon(x)$$

- b) Déterminer $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ et $f^{(3)}(0)$.

- c) En déduire la valeur de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3}$.