Révisions. Probabilités

I. Cours

Exercice 1. (**Loi géométrique**)

C'est du cours !

Donner la loi, l'espérance et la variance d'une va X suivant une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p. La valeur renvoyée par X a-t-elle plus de chances d'être paire ou impaire ? Quelle réponse élémentaire aurait-on pu proposer si $p = 1/2$?

II. Réflexion : extraits progressifs adaptés de concours

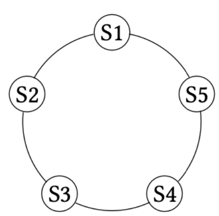
Exercice 2. (**Une rencontre difficile**)

C'est du cours !

Rappeler la définition d'un système complet d'événements $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, ainsi que la formule des probabilités totales associée à ce sce pour calculer $\mathbb{P}(B)$.

C'est du cours !

Donner l'expression générale d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 de la forme $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ selon les valeurs des réels a, b. Comment déterminer les paramètres ?



Deux personnes P_1 et P_2 ont rendez-vous dans un complexe formé de 5 sites S_1, S_2, S_3, S_4 et S_5, disposés en pentagone comme illustré par la figure ci-dessus. Ils arrivent à l'heure au rendez-vous, mais suite à un malentendu, P_1 se présente au site S_1 et P_2 au site S_2. Ils décident de partir à la recherche l'un de l'autre, et le font selon les règles suivantes :

— Les deux personnes se déplacent en même temps ;
— Chaque personne, si elle ne se trouve pas déjà sur le même site que l'autre, choisit de façon uniforme un site voisin de celui où elle se trouve, et s'y rend ;
— Tous les déplacements se font de façon indépendante.

Les deux protagonistes ne peuvent pas se retrouver sur les chemins menant d'un site à un autre. Pour tout entier naturel n, on définit les trois événements A_n, B_n, C_n :

— A_n : « Les deux personnes sont sur le même site après n déplacements » ;

— B_n : « Les deux personnes sont sur des sites adjacents après n déplacements » ;
— C_n : « Les deux personnes sont à deux routes de distance après n déplacements ».
On note a_n, b_n, c_n les probabilités respectives de ces événements.

(1) Justifier que A_n, B_n, C_n forment, pour tout entier n, un système complet d'événements.

(2) Déterminer les valeurs de a_0, b_0, c_0.

(3) (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1}) = \dfrac{1}{4}$
   (b) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) = 1$
   (c) Déterminer toutes les probabilités conditionnelles analogues.

(4) Établir les relations suivantes, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{4}\, c_n, \\ b_{n+1} = \dfrac{3}{4}\, b_n + \dfrac{1}{4}\, c_n, \\ c_{n+1} = \dfrac{1}{4}\, b_n + \dfrac{1}{2}\, c_n. \end{cases}$$

(5) (a) En déduire la relation suivante pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$b_{n+2} = \frac{5}{4} b_{n+1} - \frac{5}{16} b_n$$

   (b) En déduire une expression de b_n en fonction de n (qui pourra faire intervenir les réels $\alpha = \dfrac{5-\sqrt{5}}{8}$ et $\beta = \dfrac{5+\sqrt{5}}{8}$).
   (c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \dfrac{\sqrt{5}}{5}(\beta^n - \alpha^n)$.

(6) (a) Exprimer a_n en fonction de n, α et β (on pourra considérer la somme $a_n + b_n + c_n$).
   (b) Déterminer la limite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) Quelle interprétation peut-on donner à cette limite ?

Exercice 3. (**Des urnes** - d'après Ecricome)
On dispose de trois urnes U_1, U_2 et U_3, et d'une infinité de jetons numérotés 1, 2, 3, 4, ...
On répartit un par un les jetons dans les urnes : pour chaque jeton, on choisit au hasard et avec équiprobabilité une des trois urnes dans laquelle on place le jeton. Le placement de chaque jeton est indépendant de tous les autres jetons, et la capacité des urnes en nombre de jetons n'est pas limitée.
Pour tout entier naturel n non nul, on note X_n (respectivement Y_n, Z_n) le nombre de jetons présents dans l'urne 1 (respectivement l'urne 2, l'urne 3) après avoir réparti les n premiers jetons.
Pour tout entier naturel n non nul, on note V_n l'événement « Après la répartition des n premiers jetons, au moins une urne reste vide ».

(1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Justifier que X_n, Y_n, Z_n suivent la même loi binomiale dont on précisera les paramètres.
   (b) Expliciter $\mathbb{P}(X_n = 0)$ et $\mathbb{P}(X_n = n)$.
   (c) Justifier que $[Y_n = 0] \cap [Z_n = 0] = [X_n = n]$.
   (d) Exprimer l'événement V_n à l'aide des événements $[X_n = 0]$, $[Y_n = 0]$ et $[Z_n = 0]$.
   (e) En déduire que : $\mathbb{P}(V_n) = 3(\dfrac{2}{3})^n - 3(\dfrac{1}{3})^n$.

(2) On note V l'événement : « Au moins l'une des trois urnes reste toujours vide ».
Exprimer l'événement V à l'aide des événements V_n, puis démontrer que $\mathbb{P}(V) = 0$.

(3) Soit T la variable aléatoire égale au nombre de jetons nécessaires pour que, pour la première fois, chaque urne contienne au moins un jeton.
Dans cette question, on supposera la librairie `random` importée par la commande
`import numpy.random as rd`.

(a) On rappelle qu'en `Python` la commande `rd.randint(a, b+1)` renvoie un nombre entier aléatoire de l'intervalle $[\![a,b]\!]$.
Compléter la fonction `Python` ci-dessous pour qu'elle simule le placement des jetons jusqu'au moment où chaque urne contient au moins un jeton, et pour qu'elle renvoie la valeur prise par la variable aléatoire T.

```
def simulation_T():
    X=0
    Y=0
    Z=0
    n=0
    L=[X,Y,Z]
    while .................. :
        i=rd.randint(1, 4) # choix d un nombre entier entre 1 et 3
        L[i-1]= ..........
        n=n+1
    t = ...
    return t
```

(b) Écrire un script `Python` qui simule 10000 fois la variable aléatoire T et qui renvoie la valeur approchée de son espérance (en supposant que cette espérance existe).

(4) Déterminer $T(\Omega)$.

(5) Démontrer que : $\forall n \in T(\Omega), \quad \mathbb{P}(T=n) = \mathbb{P}(V_{n-1}) - \mathbb{P}(V_n)$.

(6) Démontrer que la variable aléatoire T admet une espérance, et la calculer.

Exercice 4. (**Probabilités avec des matrices**)
On dispose d'une urne contenant quatre boules numérotées 1, 2, 3 et 4. On effectue dans cette urne une succession de tirages d'une boule avec remise et on suppose qu'à chaque tirage chacune des boules a la même probabilité d'être tirée.
On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus en n tirages (on a donc $X_1 = 1$).
Par exemple, si les premiers tirages ont donné $2, 2, 1, 2, 1, 4, 3$, alors on a : $X_1 = 1$, $X_2 = 1$, $X_3 = 2$, $X_4 = 2$, $X_5 = 2$, $X_6 = 3$, $X_7 = 4$.
Soit $A = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 3/4 & 1 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}$ et on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}([X_n=1]) \\ \mathbb{P}([X_n=2]) \\ \mathbb{P}([X_n=3]) \\ \mathbb{P}([X_n=4]) \end{pmatrix}$. On introduit également quatre matrices colonnes : $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $V_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(1) Déterminer la loi de la variable aléatoire X_2.

(2) Calculer $\mathbb{E}[X_2]$ et $\mathbb{V}[X_2]$.

(3) Déterminer U_1.

(4) Préciser l'ensemble des valeurs possibles prises par X_n.

(5) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la relation $U_{n+1} = AU_n$.

(6) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n = (\frac{1}{4})^{n-1}V_1 + 3(\frac{1}{2})^{n-1}V_2 + 3(\frac{3}{4})^{n-1}V_3 + V_4$.

(7) En déduire la loi de la variable aléatoire X_n.

(8) Calculer $\mathbb{E}[X_n]$ et déterminer, si elle existe, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}[X_n]$. Est-ce cohérent ?

Exercice 5. ($\star$ **Encore des urnes** - d'après EDHEC)
Soit n un entier naturel non nul et p un réel de $]0;1[$. On pose $q = 1 - p$.
On dispose de deux urnes, l'urne U qui contient n boules numérotées de 1 à n et l'urne V qui contient des boules blanches en proportion p.
On pioche une boule au hasard dans U et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.
Si X prend la valeur k, on pioche k boules dans V, une par une, avec remise à chaque fois de la boule tirée, et on appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

(1) Dans le cas où $n = 1$, reconnaitre la loi de Y.
On revient au cas général.

(2) Reconnaitre la loi de X et donner son espérance et sa variance.

(3) Soit k un élément de $[\![1, n]\!]$. Reconnaître la loi de Y, conditionnellement à l'événement $[X = k]$, et en déduire, en distinguant les cas $0 \leq i \leq k$ et $k < i$, la probabilité $\mathbf{P}_{[X=k]}(Y = i)$.

(4) Écrire un script Python permettant de simuler une réalisation des variables aléatoires X et Y, l'utilisateur donnant en argument le nombre n de boules dans l'urne et la proportion p. On supposera la librairie `numpy.random` importée grâce à la commande `import numpy.random as rd` et on rappelle les commandes utiles :
- ◇ `rd.binomial(n,p)` renvoie une simulation d'une binomiale de paramètres n et p.
- ◇ `rd.randint(a,b+1)` renvoie un nombre entier aléatoire entre a et b.
- ◇ `rd.poisson(lambda)` renvoie une simulation d'une Poisson de paramètre λ.
- ◇ `rd.geometric(p)` renvoie une simulation d'une loi géométrique de paramètre p.

(5) (a) Justifier que l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par Y est égal à $[\![0, n]\!]$, puis montrer que :

$$\mathbf{P}(Y = 0) = \frac{q\,(1 - q^n)}{n(1 - q)}$$

(b) Écrire, pour tout i de $[\![1, n]\!]$, la probabilité $\mathbf{P}(Y = i)$ sous la forme d'une somme de $n - i + 1$ termes que l'on ne cherchera pas à simplifier.

(6) (a) Soit i et k deux entiers naturels tels que $1 \leq i \leq k \leq n$. Montrer l'égalité : $i\binom{k}{i} = k\binom{k-1}{i-1}$.

(b) Établir ensuite que Y possède une espérance et que celle-ci est donnée par :

$$\mathbf{E}[Y] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(k\sum_{i=1}^{k}\binom{k-1}{i-1}p^i q^{k-i}\right)$$

(c) En déduire que $\mathbf{E}[Y] = \dfrac{(n+1)p}{2}$.

(7) (a) Établir que :

$$\forall n \geq 2, \quad \mathbf{E}[Y(Y-1)] = \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\left(k(k-1)\sum_{i=2}^{k}\binom{k-2}{i-2}p^i q^{k-i}\right).$$

(b) Montrer que l'on a :

$$\forall n \geq 2, \quad \mathbf{E}[Y(Y-1)] = \frac{(n^2-1)\,p^2}{3}$$

(c) Vérifier que cette expression reste valable pour $n = 1$.

(d) Exprimer, sans chercher à la calculer, la variance de Y en fonction de $\mathbf{E}[Y(Y-1)]$ et $\mathbf{E}[Y]$.

Exercice 6. ($\star$ **Nombres de numéros distincts lors de tirages avec remise**)
On considère une urne contenant $n + 1$ boules numérotées de 0 à n. On y effectue une suite de tirages d'une boule à la fois avec remise. On définit la suite de variables aléatoires $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de la manière suivante :
- X_1 est une variable aléatoire constante égale à 1.
- Pour $k \in [\![2, +\infty[\![$, $X_k = 1$ si le numéro obtenu au k-ième tirage n'a pas déjà été obtenu au cours des tirages précédents, et $X_k = 0$ sinon.

(1) Déterminer la loi de X_2.

(2) Soit $k \in [\![2, +\infty[\![$. Montrer :

$$X_k(\Omega) = \{0, 1\} \text{ et } \mathbb{P}([X_k = 1]) = (\frac{n}{n+1})^{k-1}$$

En déduire l'espérance de X_k.

(3) (i) Montrer :

$$\forall i < j, \ \mathbb{P}([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) = \frac{(n-1)^{i-1} n^{j-i}}{(n+1)^{j-1}}$$

(ii) En déduire, pour tout $i < j$, la loi du produit $X_i X_j$.

(4) Soit $N \geqslant 2$. On note Z_N la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus au cours des N premiers tirages. Exprimer Z_N en fonction des X_k et en déduire son espérance $\mathbb{E}[Z_N]$.