TD : Récurrences et sommes

1. Prouver par récurrence les résultats suivants :
   (a) $\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.
   (b) $2^{n-1} \leq n!$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$
   (c) $n! \leq n^n$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$
   (d) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^4+2n^3+n^2}{4}$ pour $n \in \mathbf{N}^*$.

2. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}, (v_n)_{n\in\mathbf{N}}, (w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies par :
$$\begin{cases} u_0 = 0 & \text{et } u_{n+1} = u_n^2 \ \forall n \in \mathbf{N}. \\ v_0 = 1 & \text{et } v_{n+1} = -v_n \ \forall n \in \mathbf{N}. \\ w_0 = 2 & \text{et } w_{n+1} = w_n^2 \ \forall n \in \mathbf{N}. \end{cases}$$
   Montrer par récurrence que :
   (a) $\forall n \in \mathbf{N}, u_n = 0$
   (b) $\forall n \in \mathbf{N}, v_n = (-1)^n$
   (c) $\forall n \in \mathbf{N}, w_n = 2^{2^n}$

3. Prouver par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$ que : $\forall x \in \mathbf{R}_+ : (1+x)^n \geqslant 1 + nx$

4. Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbf{N} : |u_{n+1} - 6| \leqslant 3|u_n - 6|$
   Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N} : |u_n - 6| \leqslant 3^n |u_0 - 6|$

5. Prouver les formules suivantes :
   (a) $\sum_{k=0}^{N} 2 = 2N + 2$ pour $N \in \mathbf{N}$
   (b) $\sum_{k=1}^{n} k + 1 = \frac{n^2+3n}{2}$ pour $n \in \mathbf{N}^*$
   (c) $\sum_{k=1}^{n} k^2 - k + 2 = \frac{n(n+1)(2n-2)+12n}{6}$ pour $n \geqslant 2$.

6. En utilisant un télescopage, simplifier les sommes suivantes :
   (a) $\sum_{k=1}^{10} k^2 - (k-1)^2$
   (b) $\sum_{k=3}^{12} 2^{k+1} - 2^k$
   (c) $\sum_{k=0}^{n} ln(k+2) - ln(k+1)$ pour $n \geqslant 0$
   (d) $\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$
7. Écrire sous forme de produit les expressions suivantes :
   (a) $1^2 \times 2^2 \times \ldots \times 10^2$
   (b) $\frac{1}{2^3} \times \frac{1}{3^3} \times \ldots \times \frac{1}{n^3}$
   (c) $2^2 \times 3^3 \times \ldots \times n^n$
   (d) $\frac{10}{1} \times \frac{9}{2} \times \ldots \times \frac{1}{10}$

8. Simplifier les produits suivants :
   (a) $\prod_{k=1}^{n} 2$ pour $n \geqslant 1$
   (b) $\prod_{k=1}^{7} k$
   (c) $\prod_{k=1}^{n+1} k$ pour $n \geqslant 0$
   (d) $\prod_{k=1}^{n} 3k$ pour $n \geqslant 1$
   (e) $\prod_{k=1}^{13} \frac{k}{k+1}$
   (f) $\prod_{k=0}^{n} \frac{k+3}{k+2}$ pour $n \geqslant 1$

9. Prouver les formules suivantes :
   (a) Pour tout réel q différent de 1 : $\sum_{k=1}^{n} kq^{k-1} = \frac{nq^{n+1}-(n+1)q^n+1}{(1-q)^2}$
   (b) Pour tout entier $n > 1$: $\sum_{k=2}^{n} \frac{k(k-1)}{2^k} = 4 - \frac{1}{2^n}\left(n^2 + 3n + 4\right)$.