Corrections

Exercice 1 (1) Résolution de l'équation $\frac{3}{2}x - 2 = -\frac{1}{2}x + 2$

Domaine : En l'absence d'opérations potentiellement interdites, on a $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Résolution : On a : $\frac{3}{2}x - 2 = -\frac{1}{2}x + 2 \iff \frac{3}{2}, x + \frac{1}{2}x = 2 + 2 \iff 2x = 4 \iff x = 2.$

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S} = \{2\}.}$

(2) Résolution de l'équation $\frac{x-1}{3} = \frac{x+1}{4}$

Domaine : En l'absence d'opérations potentiellement interdites, on a $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Résolution : On a : $\frac{x-1}{3} = \frac{x+1}{4} \iff 4(x-1) = 3(x+1) \iff 4x-4 = 3x+3 \iff 4x-3x = 7 \iff x = 7$

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S} = \{7\}.}$

(3) Résolution de l'équation $\frac{x-2}{x+2} = -3$

Domaine : Le quotient $\frac{x-2}{x+2}$ existe si $x + 2 \neq 0$, soit $x \neq -2$. Donc $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Résolution : On a $\frac{x-2}{x+2} = -3 \iff x - 2 = -3(x+2) \iff x - 2 = -3x - 6 \iff x + 3x = 2 - 6 \iff$
$4x = -4 \iff x = -1$
De plus, $-1 \in \mathcal{D}$.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S} = \{-1\}.}$

(4) Résolution de l'équation $\frac{6x-2}{3x+2} = 3$

Domaine : Le quotient $\frac{6x-2}{3x+2}$ existe si $3x + 2 \neq 0$, soit $x \neq -\frac{2}{3}$. Donc $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}$.

Résolution : On a : $\frac{6x-2}{3x+2} = 2 \iff 6x - 2 = 2(3x+2) \iff 6x - 2 = 6x + 4 \iff -2 = 4$
Or la proposition $-2 = 4$ est fausse, donc il ne peut pas y avoir de solution.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S} = \emptyset.}$

(5) Résolution de l'équation $5 + \frac{4}{x-1} = 6$

Domaine : Le quotient $\frac{4}{x-1}$ existe si $x - 1 \neq 0$, soit $x \neq 1$. Donc $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Résolution : On a $5 + \frac{4}{x-1} = 6 \iff \frac{4}{x-1} = 1 \iff 4 = x - 1 \iff x = 5$
De plus, $5 \in \mathcal{D}$.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S} = \{5\}.}$

(6) Résolution de l'équation $x^2 = -3x$

Domaine : En l'absence d'opérations potentiellement interdites, on a $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Résolution : On a $x^2 = -3x \iff x^2 + 3x = 0 \iff x(x+3) = 0 \iff x = 0$ ou $x + 3 = 0 \iff x = 0$ ou $x = -3$.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S} = \{-3, 0\}.}$

(7) Résolution de l'équation $x^2 = 16$

Domaine : En l'absence d'opérations potentiellement interdites, on a $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Résolution : On a $x^2 = 16 \iff x^2 - 16 = 0 \iff x^2 - 4^2 = 0 \iff (x-4)(x+4) = 0 \iff x - 4 = 0$ ou $x + 4 = 0 \iff x = 4$ ou $x = -4$.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S} = \{-4, 4\}.}$

(8) Résolution de l'équation $x^2 = 2x + 3$

Domaine : En l'absence d'opérations potentiellement interdites, on a $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Résolution : On a $x^2 = 2x + 3 \iff x^2 - 2x - 3 = 0$.
Or le trinôme $x^2 - 2x - 3$ a pour discriminant $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 4 + 12 = 16 > 0$ donc l'équation $x^2 - 2x - 3 = 0$ admet deux solutions données par $\dfrac{2 - \sqrt{16}}{2} = \dfrac{2 - 4}{2} = -1$ et $\dfrac{2 + \sqrt{16}}{2} = \dfrac{2 + 4}{2} = 3$.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S} = \{-1, 3\}.}$

(9) Résolution de l'équation $x^2 = x - 1$

Domaine : En l'absence d'opérations potentiellement interdites, on a $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Résolution : On a $x^2 = x - 1 \iff x^2 - x + 1 = 0$.
Or le trinôme $x^2 - x + 1$ a pour discriminant $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3 < 0$ donc l'équation $x^2 - x + 1 = 0$ n'admet pas de solution.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S} = \emptyset.}$

(10) Résolution de l'équation $3x^2 + 5x + 2 = 0$

Domaine : En l'absence d'opérations potentiellement interdites, on a $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Résolution : Le trinôme $3x^2 + 5x + 2$ a pour discriminant $\Delta = 5^2 - 4 \times 3 \times 2 = 25 - 24 = 1 > 0$ donc l'équation $3x^2 + 5x + 2$ admet deux solutions données par $\dfrac{-5 - \sqrt{1}}{2 \times 3} = -1$ et $\dfrac{-5 + \sqrt{1}}{2 \times 3} = -\dfrac{2}{3}$.

Conclusion : On a donc $\boxed{\left\{-\dfrac{2}{3}, -1\right\}.}$

(11) Résolution de l'équation $x^2 - \dfrac{8}{3}x + \dfrac{16}{9} = 0$

Domaine : En l'absence d'opérations potentiellement interdites, on a $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Résolution : Le trinôme $x^2 - \dfrac{8}{3}x + \dfrac{16}{9} = 0$ a pour discriminant $\Delta = \left(\dfrac{8}{3}\right)^2 - 4 \times 1 \times \dfrac{16}{9} = \dfrac{64}{9} - \dfrac{64}{9} = 0$ donc l'équation $x^2 - \dfrac{8}{3}x + \dfrac{16}{9} = 0$ admet une unique solution donnée par $\dfrac{\frac{8}{3}}{2} = \dfrac{4}{3}$.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\dfrac{4}{3}\right\}.}$

(12) Résolution de l'équation $x^2 - 2x - 4 = 0$

Domaine : En l'absence d'opérations potentiellement interdites, on a $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Résolution : Le trinôme $x^2 - 2x - 4$ a pour discriminant $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 4 + 16 = 20 > 0$ donc l'équation $x^2 - 2x - 4 = 0$ admet deux solutions données par $\dfrac{2 - \sqrt{20}}{2} = 1 - \sqrt{5}$ et $\dfrac{2 + \sqrt{20}}{2} = 1 + \sqrt{5}$.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S} = \{1 - \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5}\}.}$

(13) Résolution de l'équation $(x + 1)(x^2 - 3x + 2) = 0$

Domaine : En l'absence d'opérations potentiellement interdites, on a $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Résolution : D'après la règle du produit nul, $(x + 1)(x^2 - 3x + 2) = 0 \iff x + 1 = 0$ ou $x^2 - 3x + 2 = 0$.
Le trinôme $x^2 - 3x + 2$ a pour discriminant $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1 > 0$ donc l'équation $x^2 - 3x + 2 = 0$ admet deux solutions données par $\dfrac{3 - \sqrt{1}}{2} = 1$ et $\dfrac{3 + \sqrt{1}}{2} = 2$.
Puis $x + 1 = 0 \iff x = -1$. Donc l'équation étudiée admet trois solutions données par -1, 1 et 2.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S} = \{-1, 1, 2\}.}$

(14) Résolution de l'équation $\dfrac{x + 1}{x - 1} = x$

Domaine : Le quotient $\dfrac{x+1}{x-1}$ existe si $x-1 \neq 0$, soit $x \neq 1$. Donc $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Résolution : On a $\dfrac{x+1}{x-1} = x \iff x+1 = x(x-1) \iff x+1 = x^2 - x \iff x^2 - 2x - 1 = 0$
Or le trinôme $x^2 - 2x - 1$ a pour discriminant $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 4 + 4 = 8 > 0$ donc l'équation $x^2 - 2x - 1 = 0$ admet deux solutions données par $\dfrac{2-\sqrt{8}}{2} = 1 - \sqrt{2}$ et $\dfrac{2+\sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2}$.
De plus, $1 - \sqrt{2} \in \mathcal{D}$ et $1 + \sqrt{2} \in \mathcal{D}$ car $\sqrt{2} \neq 0$.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S} = \{1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\}.}$

(15) Résolution de l'équation $\dfrac{x+1}{x-1} = -x$

Domaine : Le quotient $\dfrac{x+1}{x-1}$ existe si $x-1 \neq 0$, soit $x \neq 1$. Donc $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Résolution : On a $\dfrac{x+1}{x-1} = -x \iff x+1 = -x(x-1) \iff x+1 = -x^2 + x \iff x^2 = -1$
Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$, donc l'équation $x^2 = -1$ n'admet aucune solution.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S} = \emptyset.}$

(16) Résolution de l'équation $\dfrac{x+1}{x+3} = \dfrac{x+4}{x+2}$

Domaine : Le quotient $\dfrac{x+1}{x+3}$ existe si $x+3 \neq 0$, soit $x \neq -3$ et le quotient $\dfrac{x+4}{x+2}$ existe si $x+2 \neq 0$, soit $x \neq -2$. Donc $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-4, -3\}$.

Résolution : On a $\dfrac{x+1}{x+3} = \dfrac{x+4}{x+2} \iff (x+1)(x+2) = (x+3)(x+4) \iff x^2 + 3x + 2 = x^2 + 7x + 12 \iff 3x + 2 = 7x + 12 \iff 2 - 12 = 7x - 3x \iff -10 = 4x \iff x = -\dfrac{10}{4} \iff x = -\dfrac{5}{2}$.
De plus, $-\dfrac{5}{2} \in \mathcal{D}$.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\dfrac{5}{2}\right\}.}$

(17) Résolution de l'équation $\dfrac{2x-1}{x^2-1} = 0$

Domaine : Le quotient $\dfrac{2x-1}{x^2-1}$ existe si $x^2 - 1 \neq 0$.
Or $x^2 - 1 \neq 0 \iff x^2 \neq 1 \iff x \neq -1$ et $x \neq 1$.
Donc $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Résolution : On a $\dfrac{2x-1}{x^2-1} = 0 \iff 2x - 1 = 0 \iff 2x = 1 \iff x = \dfrac{1}{2}$.
De plus, $\dfrac{1}{2} \in \mathcal{D}$.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\dfrac{1}{2}\right\}.}$

(18) Résolution de l'équation $1 - \dfrac{1}{x^2+1} = x$

Domaine : Le quotient $\dfrac{1}{x^2+1}$ existe si $x^2 + 1 \neq 0$.
Or $x^2 + 1 \neq 0 \iff x^2 \neq -1$, ce qui est toujours vrai. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 1 \neq 0$.
Donc $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Résolution : On a $1 - \dfrac{1}{x^2+1} = x \iff \dfrac{x^2+1-1}{x^2+1} = x \iff \dfrac{x^2}{x^2+1} = x \iff x^2 = x(x^2+1) \iff x^2 = x^3 + x \iff x^3 - x^2 + x = 0 \iff x(x^2 - x + 1) = 0 \iff x = 0$ ou $x^2 - x + 1 = 0$.
Or le trinôme $x^2 - x + 1$ a pour discriminant $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3 < 0$ donc l'équation $x^2 - x + 1 = 0$ ne possède aucune solution.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S} = \emptyset.}$

(19) Résolution de l'équation $\dfrac{x^2+x-2}{x-1} = 0$

Domaine : Le quotient $\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$ existe si $x-1 \neq 0$, soit $x \neq 1$. Donc $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Résolution : D'après la règle du quotient nul, $\dfrac{x^2+x-2}{x-1} = 0 \Longleftrightarrow x^2+x-2 = 0$.
Or le trinôme x^2+x-2 a pour discriminant $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 1+8 = 9 > 0$ donc l'équation $x^2+x-2=0$ admet deux solutions données par $\dfrac{-1-\sqrt{9}}{2} = -2$ et $\dfrac{-1+\sqrt{9}}{2} = 1$.
Or $-2 \in \mathcal{D}$ et $1 \notin \mathcal{D}$. Donc l'équation étudiée admet une unique solution donnée par $x = -2$.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S} = \{-2\}.}$

(20) Résolution de l'équation $\ln(x) - \ln(x-1) = 1$

Domaine : L'expression $\ln(x)$ existe si $x > 0$ et l'expression $\ln(x-1)$ existe si $x-1>0$, soit $x > 1$.
Donc $\mathcal{D} =]1, +\infty[$.

Résolution : On a $\ln(x) - \ln(x-1) = 1 \Longleftrightarrow \ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right) = 1 \Longleftrightarrow \dfrac{x}{x-1} = e \Longleftrightarrow x = e(x-1) \Longleftrightarrow x = ex - e \Longleftrightarrow e = ex - x \Longleftrightarrow e = x(e-1) \Longleftrightarrow x = \dfrac{e}{e-1}$ car $e - 1 \neq 0$.
De plus, $e > e-1$, donc $\dfrac{e}{e-1} > 1$, donc $\dfrac{e}{e-1} \in \mathcal{D}$.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\dfrac{e}{e-1}\right\}.}$

(21) Résolution de l'équation $\ln\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = \ln 2$

Domaine : L'expression $x + \dfrac{1}{x}$ existe si $x \neq 0$.
L'expression $\ln\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$ existe si $x + \dfrac{1}{x} > 0$.
Or $x + \dfrac{1}{x} > 0 \Longleftrightarrow \dfrac{x^2+1}{x} > 0 \Longleftrightarrow x > 0$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2+1 > 0$.
Donc $\mathcal{D} = \mathbb{R}_+^*$.

Résolution : On a $\ln\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = \ln 2 \Longleftrightarrow 1 + \dfrac{1}{x} = 2 \Longleftrightarrow \dfrac{x^2+1}{x} = 2 \Longleftrightarrow x^2+1 = 2x \Longleftrightarrow x^2-2x+1 = 0 \Longleftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Longleftrightarrow x-1 = 0 \Longleftrightarrow x = 1$.
De plus $1 \in \mathcal{D}$.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S} = \{1\}.}$

(22) Résolution de l'équation $\ln\left(3x - 2x^2\right) = 0$

Domaine : L'expression $\ln(3x-2x^2)$ existe si $3x - 2x^2 > 0$.
Or $3x - 2x^2 > 0 \Longleftrightarrow x(3-2x) > 0$. On dresse le tableau :

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
signe de x		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $3-2x$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $x(3-2x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc par lecture du tableau, $x(3-2x) > 0 \Longleftrightarrow 0 < x < \dfrac{3}{2}$.

Donc $\mathcal{D} = \left]0, \dfrac{3}{2}\right[$.

Résolution : On a $\ln(3x-2x^2)=0 \Longleftrightarrow 3x-2x^2=1 \Longleftrightarrow 2x^2-3x+1=0$.
Or le trinôme $2x^2-3x+1$ a pour discriminant $\Delta=(-3)^2-4\times 2\times 1=9-8=1>0$ donc l'équation $2x^2-3x+1=0$ admet deux solutions données par $\dfrac{3-\sqrt{1}}{2\times 2}=\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{3+\sqrt{1}}{2\times 2}=1$.
De plus, $\dfrac{1}{2}\in\mathcal{D}$ et $1\in\mathcal{D}$.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S}=\left\{\frac{1}{2},1\right\}.}$

(23) Résolution de l'équation $e^{4x^2-1}=\dfrac{1}{e^{3x}}$

Domaine : Le quotient $\dfrac{1}{e^{3x}}$ existe si $e^{3x}\neq 0$, ce qui est toujours le cas par propriété de la fonction exponentielle, donc on a $\mathcal{D}=\mathbb{R}$.

Résolution : On a $e^{4x^2-1}=e^{-3x} \Longleftrightarrow 4x^2-1=-3x \Longleftrightarrow 4x^2+3x-1=0$.
Or le trinôme $4x^2+3x-1$ a pour discriminant $\Delta=3^2-4\times 4\times(-1)=9+16=25>0$ donc l'équation $4x^2+3x-1=0$ admet deux solutions données par $\dfrac{-3-\sqrt{25}}{2\times 4}=-1$ et $\dfrac{-3+\sqrt{25}}{2\times 4}=\dfrac{1}{4}$.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S}=\left\{-1,\frac{1}{4}\right\}.}$

(24) Résolution de l'équation $\dfrac{e^x-1}{e^x+1}=\dfrac{1}{2}$

Domaine : L'expression $\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ existe si $e^x+1\neq 0$.
Or $e^x+1\neq 0 \Longleftrightarrow e^x\neq -1$, ce qui est toujours vrai par propriété de l'exponentielle.
Donc $\mathcal{D}=\mathbb{R}$.

Résolution : On a $\dfrac{e^x-1}{e^x+1}=\dfrac{1}{2} \Longleftrightarrow 2(e^x-1)=e^x+1 \Longleftrightarrow 2e^x-2=e^x+1 \Longleftrightarrow 2e^x-e^x=1-(-2) \Longleftrightarrow e^x=3 \Longleftrightarrow x=\ln 3$

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S}=\{\ln 3\}.}$

Exercice 2 (1) $\dfrac{1}{4}x-\dfrac{3}{2}\leq\dfrac{1}{2}x-2$

Domaine : En l'absence d'opérations potentiellement interdites, le domaine est $\mathcal{D}=\mathbb{R}$.

Résolution : On a $\dfrac{1}{4}x-\dfrac{3}{2}\leq\dfrac{1}{2}x-2 \Longleftrightarrow 2-\dfrac{3}{2}\leq\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4}x \Longleftrightarrow \dfrac{1}{2}\leq\dfrac{1}{4}x \Longleftrightarrow 2\leq x$;

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S}=[2,+\infty[.}$

(2) $(x-1)(2x-6)\leq 0$

Domaine : En l'absence d'opérations potentiellement interdites, le domaine est $\mathcal{D}=\mathbb{R}$.

Résolution : On dresse le tableau de signe :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
signe de $x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $2x-6$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $(x-1)(2x-6)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc par lecture du tableau, $(x-1)(2x-6)\leq 0 \Longleftrightarrow 1\leq x\leq 3$.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S}=[1,3].}$

(3) $\dfrac{2x-1}{3x+2}\geq -1$

Domaine : Le quotient $\dfrac{2x-1}{3x+2} \geq -1$ existe si $3x+2 \neq 0$, soit $x \neq -\dfrac{2}{3}$. Donc $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{2}{3}\right\}$.

Résolution : On a $\dfrac{2x-1}{3x+2} \geq -1 \iff \dfrac{2x-1}{3x+2} + 1 \geq 0 \iff \dfrac{2x-1+3x+2}{3x+2} \geq 0 \iff \dfrac{5x+1}{3x+2} \geq 0$.
On dresse le tableau de signe :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$-\frac{1}{5}$		$+\infty$
signe de $5x+1$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $3x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $\dfrac{5x+1}{3x+2}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Par lecture du tableau, $\dfrac{5x+1}{3x+2} \geq 0 \iff x < -\dfrac{2}{3}$ ou $x \geq -\dfrac{1}{5}$.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S} = \left]-\infty, -\dfrac{2}{3}\right[\cup \left[-\dfrac{1}{5}, +\infty\right[.}$

(4) $\dfrac{x}{x-1} < 1$

Domaine : Le quotient $\dfrac{x}{x-1} < 1$ existe si $x-1 \neq 0$, soit $x \neq 1$. Donc $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Résolution : On a $\dfrac{x}{x-1} < 1 \iff \dfrac{x}{x-1} - 1 < 0 \iff \dfrac{x-(x-1)}{x-1} < 0 \iff \dfrac{1}{x-1} < 0 \iff x-1 < 0 \iff$ $x < 1$.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S} =]-\infty, 1[.}$

(5) $x^2 \leq -x$

Domaine : En l'absence d'opérations potentiellement interdites, le domaine est $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Résolution : On a $x^2 \leq -x \iff x^2 + x \leq 0 \iff x(x+1) \leq 0$.
On dresse le tableau de signe :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
signe de x		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $x(x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc par lecture du tableau : $x(x+1) \leq 0 \iff -1 \leq x \leq 0$.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S} = [-1, 0].}$

(6) $\dfrac{x^2}{2} > 10$

Domaine : En l'absence d'opérations potentiellement interdites, le domaine est $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Résolution : On a $\dfrac{x^2}{2} > 10 \iff x^2 > 20 \iff x^2 - 20 > 0 \iff x^2 - (\sqrt{20})^2 > 0 \iff (x-\sqrt{20})(x+\sqrt{20}) > 0 \iff (x-2\sqrt{5})(x+2\sqrt{5}) > 0$
On dresse le tableau de signe :

x	$-\infty$		$-2\sqrt{5}$		$2\sqrt{5}$		$+\infty$
signe de $x-2\sqrt{5}$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $x+2\sqrt{5}$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de x^2-20		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc par lecture du tableau : $(x-2\sqrt{5})(x+2\sqrt{5}) > 0 \iff x < -2\sqrt{5}$ ou $x > 2\sqrt{5}$.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S} =]-\infty, -2\sqrt{5}[\cup]2\sqrt{5}, +\infty[.}$

(7) $x^2 - 2x - 15 < 0$

Domaine : En l'absence d'opérations potentiellement interdites, le domaine est $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Résolution : Le trinôme $x^2-2x-15 < 0$ a pour discriminant $\Delta = (-2)^2-4\times1\times(-15) = 4+60 = 64 > 0$ donc l'équation $x^2 - 2x - 15 = 0$ possède deux solutions données par $\dfrac{2-\sqrt{64}}{2} = -3$ et $\dfrac{2+\sqrt{64}}{2} = 5$.
D'où le tableau de signe :

x	$-\infty$		-3		5		$+\infty$
signe de $x^2 - 2x - 15$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc par lecture du tableau : $x^2 - 2x - 15 < 0 \iff -3 < x < 5$.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S} =]-3, 5[.}$

(8) $4x \geq x^2 + 4$

Domaine : En l'absence d'opérations potentiellement interdites, le domaine est $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Résolution : On a $4x \geq x^2 + 4 \iff x^2 - 4x + 4 \leq 0 \iff (x-2)^2 \leq 0 \iff (x-2)^2 = 0 \iff x - 2 = 0 \iff x = 2$.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S} = \{2\}.}$

(9) $x^2 - 2x - 1 \leq 0$

Domaine : En l'absence d'opérations potentiellement interdites, le domaine est $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Résolution : Le trinôme $x^2 - 2x - 1$ a pour discriminant $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 4+4 = 8 > 0$ donc l'équation $x^2 - 2x - 1 = 0$ possède deux solutions $\dfrac{2-\sqrt{8}}{2} = 1 - \sqrt{2}$ et $\dfrac{2+\sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2}$.
On dresse le tableau de signe :

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
signe de $x^2 - 2x - 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc par lecteur du tableau : $x^2 - 2x - 1 \leq 0 \iff 1 - \sqrt{2} \leq x \leq 1 + \sqrt{2}$.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S} = [1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}].}$

(10) $\dfrac{2x-1}{1-x} \geq 1 - 2x$

Domaine : Le quotient $\dfrac{2x-1}{1-x}$ existe si $1 - x \neq 0$, soit $x \neq 1$. Donc $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Résolution : On a $\dfrac{2x-1}{1-x} \geq 1 - 2x \iff \dfrac{2x-1}{1-x} + 2x - 1 \geq 0 \iff \dfrac{2x-1+(1-x)(2x-1)}{1-x} \geq 0 \iff \dfrac{(2x-1)(1+1-x)}{1-x} \geq 0 \iff \dfrac{(2x-1)(2-x)}{1-x} \geq 0$
On dresse le tableau de signe :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		2		$+\infty$
signe de $2x-1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
signe de $2-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
signe de $1-x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
signe de $\dfrac{(2x-1)(2-x)}{1-x}$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	0	$+$	

Donc par lecture du tableau : $\dfrac{(2x-1)(2-x)}{1-x} \geq 0 \iff \dfrac{1}{2} \leq x < 1$ ou $x \geq 2$.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S} = \left[\frac{1}{2}, 1\right[\cup \left]2, +\infty\right[.}$

(11) $\dfrac{1}{x-1} \leq \dfrac{3}{x+3}$

Domaine : Le quotient $\dfrac{1}{x-1}$ existe si $x - 1 \neq 0$, soit $x \neq 1$ et le quotient $\dfrac{1}{x+3}$ existe si $x + 3 \neq 0$, soit $x \neq -3$. Donc $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$.

Résolution : On a $\dfrac{1}{x-1} \leq \dfrac{3}{x+3} \Longleftrightarrow \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{3}{x+3} \leq 0 \Longleftrightarrow \dfrac{(x+3) - 3(x-1)}{(x-1)(x+3)} \leq 0 \Longleftrightarrow \dfrac{6-2x}{(x-1)(x+3)} \leq 0.$

On dresse le tableau de signe :

x	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
signe de $6-2x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
signe de $x-1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
signe de $x+3$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $\dfrac{6-2x}{(x-1)(x+3)}$		$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Donc par lecture du tableau : $\dfrac{6-2x}{(x-1)(x+3)} \leq 0 \Longleftrightarrow -3 < x < 1$ ou $x \geq 3$.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S} =]-3, 1[\cup [3, +\infty[.}$

(12) $\dfrac{2x}{x^2-1} \leq x$

Domaine : Le quotient $\dfrac{2x}{x^2-1}$ existe si $x^2 - 1 \neq 0$.
Or $x^2 - 1 \neq 0 \Longleftrightarrow x^2 \neq 1 \Longleftrightarrow x \neq -1$ et $x \neq 1$. Donc $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Résolution : On a $\dfrac{2x}{x^2-1} \leq x \Longleftrightarrow x - \dfrac{2x}{x^2-1} \geq 0 \Longleftrightarrow \dfrac{x(x^2-1) - 2x}{x^2-1} \geq 0 \Longleftrightarrow \dfrac{x^3-3x}{x^2-1} \geq 0 \Longleftrightarrow$
$\dfrac{x(x^2-3)}{(x-1)(x+1)} \geq 0 \Longleftrightarrow \dfrac{x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(x-1)(x+1)} \geq 0.$
On dresse le tableau de signe :

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
signe de x		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
signe de $x-\sqrt{3}$		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $x+\sqrt{3}$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	
signe de $x-1$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
signe de $\dfrac{x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(x-1)(x+1)}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Donc par lecture du tableau : $\dfrac{x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(x-1)(x+1)} \geq 0 \Longleftrightarrow -\sqrt{3} \leq x < -1$ ou $0 \leq x < 1$ ou $x \geq \sqrt{3}$.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S} = [-\sqrt{3}, -1[\cup [0, 1[\cup [\sqrt{3}, +\infty[.}$

(13) $\ln(\ln(x)) < 0$

Domaine : L'expression $\ln(x)$ existe si $x > 0$ et dans ce cas, l'expression $\ln(\ln(x))$ existe si $\ln(x) > 0$.
Or $\ln(x) > 0 \Longleftrightarrow x > 1$. Donc $\mathcal{D} =]1, +\infty[$.

Résolution : On a $\ln(\ln(x)) < 0 \Longleftrightarrow \ln(x) < e^0 \Longleftrightarrow \ln(x) < 1 \Longleftrightarrow x < e^1 \Longleftrightarrow x < e.$

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S} =]1, e[.}$

(14) $(\ln(x))^2 \leq 1$

Domaine : L'expression $\ln x$ existe à condition que $x > 0$ donc $\mathcal{D} = \mathbb{R}_+^*$.

Résolution : On a $(\ln(x))^2 \leq 1 \iff (\ln(x))^2 - 1 \leq 0 \iff (\ln(x) - 1)(\ln(x) + 1) \leq 0$.
Or $\ln(x) - 1 \geq 0 \iff \ln(x) \geq 1 \iff x \geq e$ et $\ln(x) + 1 \geq 0 \iff \ln(x) \geq -1 \iff x \geq \dfrac{1}{e}$.
On peut donc dresser le tableau de signe :

x	0		$\frac{1}{e}$		e		$+\infty$
signe de $\ln(x) - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $\ln(x) + 1$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $(\ln(x) - 1)(\ln(x) + 1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc par lecture du tableau : $(\ln(x) - 1)(\ln(x) + 1) \leq 0 \iff \dfrac{1}{e} \leq x \leq e$.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S} = \left[\dfrac{1}{e}, e\right].}$

(15) $\dfrac{1-x}{1+x} \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) > 0$

Domaine : Le quotient $\dfrac{1-x}{1+x}$ existe si $1 + x \neq 0$, soit $x \neq -1$.
Le quotient $\dfrac{1+x}{1-x}$ existe si $1 - x \neq 0$, soit $x \neq 1$. Dans ce cas, l'expression $\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ existe si $\dfrac{1+x}{1-x} > 0$.
On dresse le tableau de signe :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
signe de $1 + x$		$+$	0	$-$		$-$	
signe de $1 - x$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $\dfrac{1+x}{1-x}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

Donc par lecture du tableau : $\dfrac{1+x}{1-x} > 0 \iff -1 < x < 1$. Donc $\mathcal{D} =]-1, 1[$.

Résolution : On a $\dfrac{1-x}{1+x} \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) > 0 \iff \dfrac{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}{\frac{1+x}{1-x}} > 0 \iff \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) > 0$ car $\dfrac{1+x}{1-x} > 0$ sur le domaine $\mathcal{D}$. Or $\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) > 0 \iff \dfrac{1+x}{1-x} > 1 \iff \dfrac{1+x}{1-x} - 1 > 0 \iff \dfrac{1 + x - (1-x)}{1-x} > 0 \iff \dfrac{2x}{1-x} > 0$.
On dresse le tableau de signe :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
signe de $2x$		$+$	0	$-$		$-$	
signe de $1 - x$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $\dfrac{2x}{1-x}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

Donc par lecture du tableau : $\dfrac{2x}{1-x} > 0 \iff 0 < x < 1$.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S} =]0, 1[.}$

(16) $e^{-x^2} < e^{-(x+1)^2}$

Domaine : En l'absence d'opérations potentiellement interdites, le domaine est $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Résolution : On a $e^{-x^2} < e^{-(x+1)^2} \iff -x^2 < -(x+1)^2 \iff x^2 > (x+1)^2 \iff x^2 > x^2+2x+1 \iff 0 > 2x+1 \iff 2x < -1 \iff x < -\dfrac{1}{2}$.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S} = \left]-\infty, -\dfrac{1}{2}\right[}$.

(17) $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} < \dfrac{1}{2}$

Domaine : Le quotient $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ existe si $e^x + e^{-x} \neq 0$.
Or $e^x + e^{-x} \neq 0 \iff e^x \neq -e^{-x}$ ce qui est toujours vrai car $e^x > 0$ et $-e^{-x} < 0$. Donc $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Résolution : On a $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} < \dfrac{1}{2} \iff \dfrac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} - \dfrac{1}{2} < 0 \iff \dfrac{\frac{e^{2x}-1}{e^x}}{\frac{e^{2x}+1}{e^x}} - \dfrac{1}{2} < 0 \iff \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} - \dfrac{1}{2} < 0 \iff \dfrac{2(e^{2x}-1)-(e^{2x}+1)}{2(e^{2x}+1)} < 0 \iff \dfrac{e^{2x}-3}{2(e^{2x}+1)} < 0$.
Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{2x} > 0$, donc $2(e^{2x}+1) > 0$.
Donc $\dfrac{e^{2x}-3}{2(e^{2x}+1)} < 0 \iff e^{2x} - 3 < 0 \iff e^{2x} < 3 \iff 2x < \ln(3) \iff x < \dfrac{\ln(3)}{2}$.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S} = \left]-\infty, \dfrac{\ln(3)}{2}\right[}$.

(18) $2e^{-4x^2} \geq e^{-x^2}$

Domaine : En l'absence d'opérations potentiellement interdites, le domaine est $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Résolution : On a $2e^{-4x^2} \geq e^{-x^2} \iff \dfrac{2}{e^{4x^2}} \geq \dfrac{1}{e^{x^2}} \iff \dfrac{2}{e^{4x^2}} - \dfrac{1}{e^{x^2}} \geq 0 \iff \dfrac{2-e^{3x^2}}{e^{4x^2}} \geq 0$ car on a l'égalité $e^{x^2}e^{3x^2} = e^{4x^2}$, ce qui a permis de réduire au plus petit dénominateur commun.
Or $\dfrac{2-e^{3x^2}}{e^{4x^2}} \geq 0 \iff 2 - e^{3x^2} \geq 0$ car $e^{4x^2} > 0$.
Or $2 - e^{3x^2} \geq 0 \iff e^{3x^2} \leq 2 \iff 3x^2 \leq \ln(2) \iff x^2 \leq \dfrac{\ln(2)}{3} \iff -\sqrt{\dfrac{\ln(2)}{3}} \leq x \leq \sqrt{\dfrac{\ln(2)}{3}}$.

Conclusion : On a donc $\boxed{\mathcal{S} = \left[-\sqrt{\dfrac{\ln(2)}{3}}, \sqrt{\dfrac{\ln(2)}{3}}\right]}$.

Exercice 3 (a) $\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{4}$

(b) $5\times\dfrac{3}{12}+2\times\dfrac{7}{6}=\dfrac{43}{12}$

(c) $\dfrac{8}{9}\times\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{3}=1$

(d) $\dfrac{1}{\frac{3}{4}}-\dfrac{1}{\frac{3}{7}}=-1$

(e) $\dfrac{4}{3}\times\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{14}{45}$

(f) $\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{5}{8}$

(g) $\dfrac{3}{9}-\dfrac{7}{5}\times\dfrac{2}{9}+\dfrac{8}{45}=\dfrac{1}{5}$

(h) $\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{5}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{5}+\dfrac{4}{15}\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{32}{75}$

(i) $(-1)\times\dfrac{5}{9}+1\times\dfrac{5}{12}+4\times\dfrac{5}{216}+10\times\dfrac{1}{216}=0$

(j) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^3+3\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{13}{27}$

(k) $-30\times\dfrac{8}{27}-10\times\dfrac{6}{27}+20\times\dfrac{12}{27}=-\dfrac{20}{9}$

(l) $\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\times\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\times\left(1-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{4}$

Exercice 4 (a) $(-1)^{2n}=1$

(b) $(-1)^{2n+1}=-1$

(c) $2^{n+1}-2^n=2^n$

(d) $2\times 4^n-2^{2n}=4^n$

(e) $3\times(-2)^n+(-2)^{n+1}=(-2)^n$

(f) $9^{n+2}-9^{n+1}+2\times 3^{2n}=74\times 9^n$

Exercice 5 (a) $\dfrac{\sqrt{8}}{2}=\sqrt{2}$

(b) $\dfrac{\sqrt{24}}{2\sqrt{2}}=\sqrt{3}$

(c) $\sqrt{(-3)^2}=3$

(d) $\dfrac{17}{\sqrt{17}}=\sqrt{17}$

(e) $4\sqrt{32}-5\sqrt{8}=6\sqrt{2}$

(f) $\dfrac{\sqrt{49}+\sqrt{25}}{\sqrt{49}-\sqrt{25}}=6$

(g) $(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})=-1$

(h) $(5-3\sqrt{2})\times(5+3\sqrt{2})=7$

(i) $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}-\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2=2$

Exercice 6 (a) $\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}$

(b) $\dfrac{4}{1+\sqrt{5}}=\sqrt{5}-1$

(c) $\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}=2\sqrt{2}-3$

(d) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = 7+4\sqrt{3}$

(e) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} - \dfrac{1-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \dfrac{3\sqrt{3}-15}{2}$

(f) $\dfrac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} - \dfrac{2-3\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{3+3\sqrt{3}}{2}$

Exercice 7 (a) $(a+b)^2 - 2(a+b)(a-b) + (a-b)^2 = 4b^2$

(b) $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$

(c) $(a-b)^2 + 4ab = (a+b)^2$

(d) $(1-a)^2 - 2(1-a) + 1 = a^2$

(e) $(2a+1)^2 - (2a-1)^2 = 8a$

(f) $a^2 + 2a(1-a) + (1-a)^2 = 1$

Exercice 8 (a) $\ln 2 + \ln 3 + \ln 5 = \ln(30)$

(b) $4\ln 2 - 2\ln 3 = \ln\left(\dfrac{16}{9}\right)$

(c) $\dfrac{3}{2}\ln 2 + \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = \ln 2$

(d) $2\ln\left(1+\dfrac{1}{2}\right) + \ln 3 - 2\ln 2 = \ln\left(\dfrac{27}{16}\right)$

(e) $\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) + \ln\left(\dfrac{2}{3}\right) + \ln\left(\dfrac{3}{4}\right) = -\ln(4)$

(f) $\ln\left((2+\sqrt{3})^2\right) + \ln((2-\sqrt{3})^2) = 0$