

Logique et Ensembles

1- Logique

On rappelle la signification des symboles:

$\forall$ = pour tout $\exists$ = il existe $\exists!$ = il existe un unique

Le ne sont pas des abréviations, ils sont utilisés pour caractériser précisément des énoncés mathématiques.

Par exemple: "tout entier naturel est positif" peut s'écrire " $\forall m \in \mathbb{N}, m \geq 0$ "

ou encore " $\forall t \in \mathbb{N}, t \geq 0$ "

L'usage veut qu'on ne mélange pas les deux: on n'aura pas
" m est positif $\forall m \in \mathbb{N}$ ".

Définition: On appelle proposition un énoncé mathématique qui a du sens et pouvant être vrai ou faux.

exemple: . $P =$ "les entiers naturels sont aussi des nombres rationnels"
est une proposition vraie.

. $P(m) = "2m + 1 \leq 0"$ est une proposition qui dépend d'une variable m . $P(0)$ est fausse, $P(-1)$ est vraie.

. $P(x) = "si x \geq 10, x^2$ est très grand" n'est pas une proposition car $P(x)$ n'a pas de sens précis.

Définition: On appelle la négation d'une proposition P , notée $\bar{P}$,
la proposition qui est fausse lorsque P est vraie et vraie lorsque P est fausse.

exemple: $P = " \forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \geq 2 "$

$\bar{P} = " \exists x \in \mathbb{R}; x^2 + 1 < 2 "$

ici $\bar{P}$ est vraie car $0 \in \mathbb{R}$ et $0^2 + 1 = 1 < 2$, donc P est fausse.

Définition: Soient P et Q deux propositions. On a les nouvelles propositions:

$P \text{ et } Q$: la proposition vraie si et seulement si P et Q sont vraies.

$P \text{ ou } Q$: la proposition vraie si et seulement si P ou Q est vraie (ou les deux)

$P \Rightarrow Q$: la proposition vraie si et seulement si Q est vraie quand P est vraie.

exemple: " $x^2 \leq -1 \Rightarrow x^2 + 1 \leq 0$ " est vraie.

" $x^2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$ " est fausse

Vocabulaire: Lorsque P implique Q ($P \Rightarrow Q$) on dit que P est une condition suffisante de Q et Q une condition nécessaire de P .

• On note $P \Leftrightarrow Q$ lorsque $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$.

On dit " P est équivalent à Q ".

On note aussi "si et seulement si" pour $\Leftrightarrow$.

exemple: $x^2 + x \geq 0$ si et seulement si $x \geq 0$ ou $x \leq -1$.

Remarque: Pour prouver que $P \Rightarrow Q$, on suppose que P est vraie et on démontre que Q est aussi vraie. Attention, cela ne prouve pas que P est vraie.

Il est vrai de dire que "si je suis milliardaire, alors je suis millionnaire", mais cela ne dit rien si P est vrai.

2 - Ensembles.

On peut définir un ensemble de plusieurs manières :

- En listant ses éléments :

ex: $E = \{-1, 4, -2\}$ $F = \{\text{tomate}, \text{pomme}\}$

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

- À l'aide d'une propriété que vérifient des objets :

ex: $E = \{m \in \mathbb{N} \mid m \text{ est pair}\}$

$$F = \{x \in \mathbb{N} \mid \text{il existe un entier } y \text{ vérifiant } y^2 = x\}$$

Le "/" se lit "tel que"

$$G = \{2x+1 \mid x \in \mathbb{Z} \text{ et } -3 \leq x \leq 1\}$$

On peut donc écrire : $E = \{0, 2, 4, \dots\}$ $F = \{0, 1, 4, 9, \dots\}$

$$G = \{-5, -3, -1, 1, 3\}$$

Voir les ensembles usuels :

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$: les entiers naturels
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$: les entiers relatifs
- $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{N}^* \right\}$: les nombres rationnels
- $\mathbb{R}$ = les nombres réels ("tous les nombres").
- $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$: l'intervalle ouvert $]a, b[$.
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$: le segment $[a, b]$.
- L'étoile $*$ signifie qu'on retire de l'ensemble le 0 : $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Notations ensemblistes : $x \in A$ signifie x est un élément de l'ensemble A .

- $A \subset B$ signifie A est inclus dans B (tous les éléments de A sont aussi des éléments de B)
- $\emptyset$ est l'ensemble vide (il ne possède pas d'éléments).
- $x \notin A$ signifie x n'est pas un élément de A .

Voici les opérations sur les ensembles.

Soient A et B deux sous ensembles d'un ensemble E .

- $A \cup B = \{x \in E / x \in A \text{ ou } x \in B\}$: A union B
- $A \cap B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \in B\}$: A inter B
- $A \setminus B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \notin B\}$: A privé de B
- $\bar{A} = \{x \in E / x \notin A\}$

exemple: Soient A et B des sous ensembles de $\mathbb{R}$.

- Si $A = [-1, 1]$ et $B = \mathbb{R}_+$, $A \cap B = [0, 1]$ et $A \cup B = [-1, +\infty[$.
- Si $A = \mathbb{N}$ et $B = \{0\}$, $A \cup B = \mathbb{N}$, $A \cap B = \{0\}$, $A \setminus B = \mathbb{N}^*$.

Propriétés algébriques des $\cup$ et $\cap$: $\mathcal{P}(E)$ a les mêmes propriétés que le symbole $+$ et $\mathbb{N}$ celles du symbole $\times$:

- Associativité et commutativité de $\cup$ d'une part et $\cap$ d'autre part.
- Distributivité: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

• Comme pour les sommes et les produits on peut indiquer les $\cup$ et $\cap$:

Soient $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles: $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x / x \in A_i \text{ pour tout } i \in I\}$.

exemple: $N = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{k\}$; $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \{k\} = \emptyset$; $\bigcup_{i=0}^m [i, i+1] = [0, m+1]$.

Définition: Soit E un ensemble. On définit l'ensemble des parties de E , noté $\mathcal{P}(E)$, comme l'ensemble de tous ensembles de E :

$$A \in \mathcal{P}(E) \iff A \subset E.$$

Remarque: On a toujours E et $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$.

exemple: Si $E = \{0, 1\}$. $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset; \{0\}; \{1\}; \{0, 1\}\}$.

exemple probabiliste: Si $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ représente les issues possible d'un lancer de dé. $\mathcal{P}(E)$ représente les différents événements possibles:
"un n° pair" = $A = \{2, 4, 6\} \in \mathcal{P}(E)$; "avoir 5 ou 6" = $B = \{5, 6\} \in \mathcal{P}(E)$.

Définition: Soient A et B deux ensembles. On définit le produit cartésien de A par B , noté $A \times B$ (se lit "A croix B") :

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ et } b \in B\}.$$

exemples: $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ = les couples où le premier élément est entier et le second réel.

$$\{0\} \times \{1, 2, 3\} = \{\{0, 1\}; \{0, 2\}; \{0, 3\}\}.$$

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \text{le plan} ; \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3 = \text{l'espace}$$

3_ raisonnements.

• La contraposée :

Soit $P \Rightarrow Q$ une proposition, la contraposée de $P \Rightarrow Q$ est $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$.

- La contraposée d'une proposition est vraie si et seulement si la proposition d'origine.

exemple: Montrons que pour tout $m \in \mathbb{N}$ " m^2 pair $\Rightarrow m$ pair" est vraie.

Montrons donc que sa contraposée : " m impair $\Rightarrow m^2$ impair" est vraie :

Supposons m impair, il existe donc $h \in \mathbb{N}$ tel que $m = 2h+1$,

ainsi $m^2 = (2h+1)^2 = 2 \underbrace{(2h^2 + 2h)}_{\in \mathbb{N}} + 1$ est impair.

⚠ Ne pas confondre avec la réimplication de $P \Rightarrow Q$ qui est $Q \Rightarrow P$ et qui, elle, n'est pas, en général, vraie quand la proposition est vraie.

exemple: " $x \geq 1 \Rightarrow x^2 \geq 1$ " est vraie, mais la réimplication : " $x^2 \geq 1 \Rightarrow x \geq 1$ " est fautive (prendre $x = -2$).

• Le raisonnement par l'absurde :

Pour montrer que P est vraie, on suppose $\overline{P}$ et on aboutit à une absurdité.

exemple: Montrons que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.

Ainsi il existe p et q des entiers premiers entre eux tels que $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$,

donc $\frac{p^2}{q^2} = 2$ donc $p^2 = 2q^2$ donc p^2 est pair donc p aussi

(d'après l'exemple précédent). Donc il existe $h \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2h$, donc

$(2h)^2 = 2q^2$ donc $q^2 = 2h^2$ donc q^2 est pair donc q aussi.
Cela contredit le fait que p et q sont premiers entre eux : c'est absurde.
Donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Le raisonnement par disjonction de cas :

exemple : Montrons que : " $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq x$ "

- Pour $x \geq 0$, $|x| = x \geq x$.

- Pour $x < 0$, $|x| \geq 0 > x$ donc $|x| \geq x$.

Dans tous les cas : $|x| \geq x$.

Le raisonnement par implications :

exemple : Montrons que : " $\forall x \geq 0, e^x + \ln(1+x) - 1 \geq 0$ ".

On sait que : pour $x \geq 0$, $e^x \geq 1$ donc $e^x - 1 \geq 0$.

pour $x \geq 0$, $\ln(1+x) \geq 0$

donc $e^x - 1 + \ln(1+x) \geq 0$

exemple : Montrons que $A \cap B = A \Rightarrow A \subset B$

Supposons que $A \cap B = A$. Montrons que $B \subset A$, soit donc $x \in A$.

Comme $x \in A$, $x \in A \cap B$, donc $x \in B$. Ainsi $A \subset B$.

On est parti de l'hypothèse et à l'aide d'une succession de donc on trouve à la conclusion.

Le contre-exemple :

Pour montrer qu'une proposition du type : " $\forall x, P(x)$ ", est fausse, on peut montrer qu'il existe x qui infirme la proposition.

exemple: Montrons que " $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq x+1$ " est fausse.

Pour $x=1$ $1^2 \geq 1+1$ n'est pas vraie.

exemple: Étudions la proposition: " $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad x^2 > y^2 \Rightarrow x > y$ "

On remarque que pour $x=-2$ et $y=1$, on a

$(-2)^2 > 1^2$ mais $-2 > -1$ est fausse, donc la

proposition est fausse.

⚠ Un contre-exemple ne peut servir qu'à infirmer une proposition, on ne peut pas démontrer une proposition universelle avec un exemple.

La double implication:

Pour démontrer une équivalence $P \Leftrightarrow Q$, on peut démontrer d'abord que $P \Rightarrow Q$ puis que $Q \Rightarrow P$.

exemple: Soient A et B deux ensembles. Montrons que $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subset A$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $A \cup B = A$. Soit $x \in B$, donc $x \in A \cup B$, et $A \cup B = A$ donc $x \in A$. Soit $B \subset A$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $B \subset A$. Montrons $A \cup B = A$ par double inclusion:

$\boxed{\subseteq}$ Soit $x \in A \cup B$, si $x \in B$, comme $B \subset A$, $x \in A$

si $x \notin B$, $x \in A$

donc $x \in A$ dans tous les cas

$\boxed{\supseteq}$ Soit $x \in A$, alors $x \in A \cup B$.

donc $A \cup B = A$.

N.B.: Un si et seulement si signifie une $\Leftrightarrow$.