Récurrences, Sommes et Produits.

1_ Sommes Σ

Définition : Soit $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ n $(n \in \mathbb{N}^*)$ nombres réels.

On note $a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

Plus généralement si $(a_i)_{i \in I}$ est une famille de nombre réels où I est une liste finie d'entiers, on note $\sum_{i \in I} a_i$ la somme de tous les réels de la famille $(a_i)_{i \in I}$.

exemples: $\sum_{k=0}^{4} k^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$; $\sum_{k=2}^{2} 3^k = 3^2$.

$\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k \in [\![1,n]\!]} k$. On peut la noter aussi $\sum_{1 \leq k \leq n} k$.

Remarque: • $\sum_{i=p}^{n} a_i$ se lit "somme des a_i, pour i variant de p à n"

• La variable k ou i est "muette" : $\sum_{i=p}^{n} a_i = \sum_{k=p}^{n} a_k$.

en effet les deux sommes valent :
$a_p + a_{p+1} + \dots + a_n$
le i ou le k n'existent pas vraiment !

Propriétés de calcul:

• On peut sortir des termes d'une somme :

si $n \in \mathbb{N}$, $p \leq n$, $\sum_{k=p}^{n+1} a_k = \sum_{k=p}^{n} a_k + a_{n+1}$

exemple: $\sum_{k=2}^{n} k^2 = \sum_{k=2}^{n-1} k^2 + (n+1)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 - 1^2$

- On peut regrouper des sommes de même terme (relation de Chasles) :

$$\sum_{k=p}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{N} a_k = \sum_{k=p}^{N} a_k$$

exemple : $\sum_{k=0}^{10} 2^k + \sum_{k=11}^{25} 2^k = \sum_{k=0}^{25} 2^k$.

- On peut changer d'indice :

$$\sum_{k=p}^{m} a_k = \sum_{k'=p-1}^{m-1} a_{k'+1} \text{ ou encore } = \sum_{k'=p+1}^{m+1} a_{k'-1}$$

exemple : $\sum_{k=3}^{8} e^{k+1} = \sum_{k'=4}^{7} e^{k'}$; $\sum_{k=6}^{10} \frac{1}{k-1} = \sum_{k=5}^{9} \frac{1}{k}$

<u>Propriété (Linéarité de $\sum$)</u> : Soient I une liste d'entiers, $(a_i)_{i\in I}$, $(b_i)_{i\in I}$ des familles de réels et $\alpha \in \mathbb{R}$.

- $\sum_{i\in I} a_i + b_i = \sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in I} b_i$
- $\sum_{i\in I} \alpha a_i = \alpha \sum_{i\in I} a_i$

<u>Remarques</u> : Le premier point résulte du fait que $a+b = b+a$ pour $a, b \in \mathbb{R}$.
Le second est une factorisation par α.

<u>exemple</u> : $\sum_{k=1}^{m} 2k+1 = 2\sum_{k=1}^{m} k + \sum_{k=1}^{m} 1$.

<u>Propriété</u> : Soit $p \in \mathbb{N}$, $m \geq p$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\sum_{k=p}^{m} \alpha = (m-p+1)\,\alpha$$

<u>Preuve</u> : $\sum_{k=p}^{m} \alpha = \alpha + \alpha + \dots + \alpha = \underbrace{(m-p+1)}_{\text{le nombre de termes de la somme}} \alpha$

__exemple :__ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1 = (n-1+1)1 = n$ (pas très surprenant !)

__Propriété (Télescopage) :__ Soient $p\in\mathbb{N}$, $n\geq p$ et $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite.

- $$\sum_{k=p}^{n} u_{k+1} - u_k = u_{n+1} - u_p$$

__Preuve :__ $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} u_{k+1} - u_k = \sum_{k=p}^{n} u_{k+1} - \sum_{k=p}^{n} u_k$ par linéarité

changement d'indice dans la 1ère somme

$$= \sum_{k'=p+1}^{n+1} u_{k'} - \sum_{k=p}^{n} u_k$$

on a sorti le terme en $k=n+1$
et ajouté le terme en $k=p$
dans la 1ère Σ

$$= u_{n+1} + \sum_{k'=p}^{n} u_{k'} - u_p - \sum_{k=p}^{n} u_k = u_{n+1} - u_p .$$

__exemples :__ $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{11} - 1.$

$$\sum_{k=3}^{7} k^2 - (k+1)^2 \underset{\text{linéarité}}{=} -\left[\sum_{k=3}^{7} (k+1)^2 - k^2\right] = -(8^2 - 3^2) = -55.$$

2 – Récurrences

Principe de récurrence : Soit $P(n)$ une proposition dépendant d'un entier n.

Si : $\begin{cases} \cdot\ P(n_0) \text{ est vraie} \\ \cdot\ \text{Pour tout entier } n \geq n_0 : P(n) \Rightarrow P(n+1) \end{cases}$] initialisation] hérédité

Remarque : En pratique $n_0 = 0$ ou 1.

Alors : $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

exemple et modèle de rédaction :

Montrons que, pour tout $n \geq 1$ "$2^n \geq n+1$" $= P(n)$

- Pour $n=0$ $\quad 2^0 = 1$ et $0+1=1$ donc $P(0)$ est vraie
- Supposons $P(n)$ vraie pour un entier $n \geq 1$, montrons alors $P(n+1)$.

On a donc $2^n \geq n+1$

donc $2 \times 2^n \geq 2(n+1)$

$2^{n+1} \geq 2n+2$

or $2n+2 \geq n+2$ car $n \geq 1$ donc $n \geq 0$.

D'où $2^{n+1} \geq n+2$ donc $P(n+1)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence : $\forall n \geq 1$, $2^n \geq n+1$.

Proposition : Pour tout $n \geq 0$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Preuve : Prouvons ce résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

- Pour $n=0$ $\sum_{k=0}^{0} k = 0$ et $\frac{0(0+1)}{2} = 0$, donc $P(0)$ est vraie.

- Supposons $P(n)$ vraie pour un entier $n \geq 0$, montrons alors $P(n+1)$.

Calculons $\sum_{k=0}^{n+1} k = \sum_{k=0}^{n} k + n+1$ (on a sorti le terme $k = n+1$)

d'après $P(n)$ $= \frac{n(n+1)}{2} + n+1$

$$= \frac{n^2+n+2(n+1)}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

donc $P(n+1)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence : $\forall n \geq 0$: $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Remarque : Il est <u>essentiel</u> de signaler le moment où on utilise $P(n)$ dans l'hérédité. On peut écrire "d'après $P(n)$" ou encore HR.
Si vous n'utilisez pas $P(n)$ dans l'hérédité, cela signifie que le résultat peut se montrer directement sans faire de récurrence.

Proposition : Soit $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Proposition : Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Preuve : Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ sur le même modèle que $\sum_{k=1}^{n} k$.

3 – Produits $\prod$

<u>Définition :</u> Soit $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ n ($n \in \mathbb{N}^*$) nombre réels.

On note $a_1 . a_2 \dots a_n = \prod_{i=1}^{n} a_i$

Plus généralement si $(a_i)_{i \in I}$ est une famille de nombre réels où I est une liste finie d'entiers, on note $\prod_{i \in I} a_i$ le produit de tous les réels de la famille $(a_i)_{i \in I}$.

<u>exemple :</u> $\prod_{k=1}^{3} k^2 = 1^2 \times 2^2 \times 3^2 = 36$; $\prod_{k=2}^{2} 3^k = 3^2 = 9$

$\prod_{k=1}^{n} k = \prod_{k \in [\![1,n]\!]} k$. On peut la noter aussi $\prod_{1 \leq k \leq n} k$.

<u>Remarque :</u> • $\prod_{i=p}^{n} a_i$ se lit "produit des a_i, pour i variant de p à n"

<u>Quelques propriétés de calcul :</u>

Soient $p \in \mathbb{N}$, $n \geq p$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ des suites

• $\prod_{k=p}^{n} \alpha a_i = \alpha^{n-p+1} \prod_{k=p}^{n} a_i$ • $\prod_{i=p}^{n} a_i b_i = \prod_{i=p}^{n} a_i \prod_{i=p}^{n} b_i$

• $\prod_{k=p}^{n} a_i = a_p . \prod_{k=p+1}^{n} a_i = \frac{1}{a_{n+1}} \prod_{k=p}^{n+1} a_i$

• $\prod_{k=p}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_p}$: Produit télescopique

4- Récurrences doubles, récurrence forte – Hors Programme

Principe de la récurrence double : $P(n)$ une proposition dépendant d'un entier n.

Si : $\begin{cases} \cdot\ P(n_0) \text{ et } P(n_0+1) \text{ sont vraies} \\ \cdot\ \text{Pour tout entier } n \geq n_0 : P(n) \text{ et } P(n+1) \Longrightarrow P(n+2) \end{cases}$

] initialisation

] hérédité

Alors : $P(n)$ est vrai pour tout $n \geq n_0$.

Exemple et modèle de rédaction : On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $u_0 = 1$; $u_2 = 1$ et pour tout $n \geq 0$ $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$

Montrons par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$ que : $\forall n \geq 0$ " $u_n = 2^n - \frac{1}{2} n 2^n$ "

- Pour $n = 0$ $u_0 = 1$ et $2^0 - \frac{1}{2} \cdot 0 \, 2^0 = 1$ donc $P(0)$ est vraie

  $n = 1$ $u_1 = 1$ et $2^1 - \frac{1}{2} \cdot 1 \, 2^1 = 1$ donc $P(1)$ est vrai.

- Supposons $P(n)$ et $P(n+1)$ vraies pour un entier $n \geq 0$. Montrons $P(n+2)$.

  On sait que $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$ par définition de $(u_n)_{n\geq 0}$.

  d'après $P(n)$ et $P(n+1)$ $= 4\left(2^{n+1} - \frac{1}{2}(n+1)2^{n+1}\right) - 4\left(2^n - \frac{1}{2} n 2^n\right)$

$$= 2^{n+3} - (n+1)2^{n+2} - 2^{n+2} + n2^{n+1}$$

$$= 2^{n+1}\left(4 - 2(n+1) - 2 + n\right) = 2^{n+1}\left(2 - (n+2)\right)$$

$$= 2^{n+2} - \frac{1}{2}(n+2)2^{n+2}.$$

  donc $P(n+2)$ est vrai.

Par principe de récurrence : $\forall n \geq 0$, $u_n = 2^n - \frac{1}{2} n 2^n$.

Principe de la récurrence forte :

Si : $\begin{cases} \bullet\ P(n_0) \text{ est vraie} &] \text{ initialisation} \\ \bullet\ [\forall k \in [\![n_0, n]\!], P(k) \Rightarrow P(n+1)] \text{ pour tout } n \geq n_0 &] \text{ hérédité} \end{cases}$

Alors : $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Remarque : On utilise la récurrence forte lorsqu'on a besoin, au cours de l'hérédité, d'utiliser non seulement $P(n)$ mais également les $P(k)$, pour $k \leq n$.

exemple et modèle de rédaction : On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \geq 0$ $u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Montrons par récurrence forte sur $n \geq 1$ que : $\forall n \geq 1$, "$u_n = 2^{n-1}$" $= P(n)$.

- Pour $n = 1$ $u_1 = \sum_{k=0}^{0} u_k = u_0 = 1$ et $2^{1-1} = 1$ donc $P(1)$ est vraie.

- Supposons $P(k)$ vraie pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ où n est un entier $n \geq 1$.

  Montrons donc $P(n+1)$.

  On sait que $u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k$ par définition de $(u_n)_{n\geq 0}$

$$= u_0 + \sum_{k=1}^{n} u_k = 1 + \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}$$

d'après $P(k)$, pour $k \in [\![1, n]\!]$

$$= 1 + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \underset{\Sigma \text{ géométrique}}{=} 1 + \frac{1-2^n}{1-2} = 1 + 2^n - 1 = 2^n = 2^{n+1-1}.$$

donc $P(n+1)$ est vraie.

Par principe de récurrence : $\forall n \geq 1 \quad u_n = 2^{n-1}$

<u>Remarque :</u> • On utilise une récurrence double, en pratique, pour des suites récurrentes d'ordre 2, c-à-d, des suites du type $u_{n+2} = f(u_{n+1}, u_n)$.

• La récurrence forte n'est quasiment jamais utilisée en prépa ECG.

On peut d'ailleurs contourner son usage en substituant à $P(n)$ la propriété $H(n) = $ " $P(k), \forall k \in [\![0, n]\!]$ ".

Si on y réfléchit bien, il n'y a qu'un seul principe de récurrence, la récurrence double et forte sont des cas particuliers de la récurrence "simple".