TD : Logique et ensembles

1. Traduire avec des quantificateurs les propositions suivantes :
   (a) Le carré d'un réel est positif.
   (b) Chaque entier relatif est strictement inférieur à au moins deux entiers naturels distintcs.
   (c) Entre deux entiers consécutifs, il se trouve au moins un réel.

2. Placer dans chaque affirmation le symbole adapté parmi $\Rightarrow, \Leftarrow$ *ou* $\Leftrightarrow$ (si cela est possible).
   1. Soit $x \in \mathbb{N}$.
   $$x \geq 1 \quad x > 0$$
   2. Soit $x, y \in \mathbb{R}$.
   $$x = y \quad x^2 = y^2$$
   3. Soit $x, y \in \mathbb{R}$.
   $$x^3 = y^3 \quad x^2 = y^2$$
   4. Soit $x, y \in \mathbb{R}$.
   $$x^4 = y^4 \quad x^2 = y^2$$
   5. Soit $x, y \in \mathbb{R}_+$.
   $$x = y \quad x^2 = y^2$$
   6. Soit $x, y \in \mathbb{R}$.
   $$x^2 + y^2 = 0 \quad x = y$$
   7. Soit $x, y, z \in \mathbb{R}$.
   $$x = y \quad xz = yz$$
   8. Soit $x, y \in \mathbb{R}$.
   $$|x| + |y| = 0 \quad |x + y| = 0$$
   9. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   $$x^2 < x \quad x < 1$$
   10. Soit $x, y \in \mathbb{R}$.
   $$x < y \quad x^2 < y^2$$
   11. Soit $x, y \in \mathbb{R}$.
   $$x < y \quad |x - 1| < |y - 1|$$

3. Énoncer la réciproque et la contraposée des propositions suivantes :
   (a) Si n est pair alors $3n$ est pair.
   (b) Si $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est croissante alors $u_0 \leqslant u_3$.
   (c) Si n^2 est pair alors n est pair.
   (d) Si je ne travaille pas alors j'ai des mauvais résultats.

4. Expliciter les ensembles $A \cap B, A \cup B, \overline{A} \cap B$ et $\overline{A} \cup \overline{B}$ où :
   (a) $E = [\![1, 4]\!]$, $A = \{1\}$, $B = \{1, 2, 3\}$.
   (b) $E = \mathbf{N}$, $A = \mathbf{N} \setminus \{0, 1, 2\}$, $B = \{1, 2\}$.
   (c) $E = \mathbf{R}$, $A = \mathbf{N}$, $B =]1, +\infty[$.

5. Énumérer les éléments de $\mathcal{P}(E)$ où :
   (a) $E = \{1, 2, 3\}$.
   (b) $E = \{0\}$.
   (c) $E = \{\mathbf{N}, \mathbf{R}\}$.

6. Montrer que, pour A et B des parties d'un ensemble E,
   (a) $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$.
   (b) $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subset A$.
   (c) $B \subset A \Rightarrow A \cup \overline{B} = E$.

7. Montrer que les propositions suivantes sont fausses. On pourra utiliser un contre exemple.
   (a) $\forall n \in \mathbf{N}, \frac{n}{2} \in \mathbf{N}$.
   (b) $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - x - 1 \geqslant 0$.
   (c) $\forall (p, q) \in \mathbf{Z}^2, p + 3q \geqslant -1$.
   (d) $\forall n \in \mathbf{N}^*, \frac{1}{n} < 1$

8. Exprimer à l'aide de produits cartésiens les ensembles :
   (a) Les couples d'entiers positifs et de réels.
   (b) Les triplets de réels négatifs.
   (c) Les n-uplets de 0 et de 1

9. Quel est le cardinal des ensembles suivants ($n \in \mathbf{N}$) ?
   (a) $\{1, ..., n\}$;
   (b) $\{-n, ..., n\}$;
   (c) $\{n, ..., 2n\}$;
   (d) $\{2k, k \in \{0, ..., n\} \times \{2k + 1, k \in \{0, ..., n\}\}$.

10. Soit E un ensemble. Pour toutes parties A et B de E, on pose :

$$A \Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B).$$

   (a) Montrer que : $A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.
   (b) Soient A, B et C trois parties de E vérifiant : $A \Delta B = A \Delta C$. Montrer que : $B = C$. Si $A \cup B = A \cup C$ peut-on dire que $B = C$?