TD : Applications et polynômes

1. On considère les fonctions suivantes :

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto x+1 \qquad g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto e^{x^2}$$

$$h : \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x}$$

(a) Expliciter les fonctions $f \circ g$, $g \circ f$ et $g \circ f \circ h$

(b) Donner l'ensemble de définition de $h \circ f$, $f \circ h$ et $h \circ g$

2. On considère les applications suivantes :

$$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2, \quad (x,y) \mapsto (x+y, x-y) \qquad g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad t \mapsto t^2$$

$$h : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, \quad (x,y) \mapsto xy$$

$$u : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2, \quad t \mapsto (t, 2t)$$

Expliciter les applications $h\circ f$, $g\circ h\circ f$, $f\circ u\circ h$ et $u \circ g$.

3. Montrer que les applications suivantes ne sont pas injectives :

(a) $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}, \quad n \mapsto n^2$ (b) $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto |x-1|$

(c) $h : \mathcal{P}(\mathbf{N}) \to \mathbf{N}, \quad A \mapsto Card(A)$

(d) $u : \mathcal{P}([\![0, 10]\!]) \to \mathcal{P}([\![0, 10]\!]), \quad A \mapsto A \cup \{0\}$

4. Montrer que les applications suivantes ne sont pas surjectives :

(a) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto x^2 - 1$ (b) $g : \mathbf{N} \to \mathbf{N}, \quad n \mapsto 2n$

5. Montrer que les applications suivantes sont bijectives :

(a) $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+, \quad x \mapsto x^2$

(b) $g : \mathbf{R}_+ \to [\mathbf{1}, +\infty[, \quad x \mapsto x+1$

6. On admet que les applications suivantes sont bijectives. Calculer explicitement leur bijection réciproque.

(a) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto x+2$ (b) $g : \mathbf{R} \setminus \{1\} \to \mathbf{R}^*, \quad x \mapsto \frac{1}{x-1}$

(c) $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^* \setminus \{1\}, \quad x \mapsto e^{\frac{1}{x+1}}$ (d) $u : \mathbf{R}_+ \to [ln(2), +\infty[, \quad x \mapsto ln(e^{x^2}+1)$

7. Soient $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$, $h : G \longrightarrow H$ des applications.

(a) Montrer que si f et g sont injectives alors $g \circ f$ l'est aussi.

(b) Montrer que si g et h sont surjectives alors $h \circ g$ l'est aussi.

8. Soit la fonction f définie par :

$$f : \mathbf{R} \setminus \{-1\} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \frac{1-x}{1+x}$$

Calculer $f \circ f$.

En déduire que f est bijective de $\mathbf{R} \setminus \{-1\}$ dans $\mathbf{R} \setminus \{-1\}$.

9. Factoriser les polynômes suivants :

(a) $P(x) = x^2 - x - 1$

(b) $Q(x) = -3x^2 - x + 1$

(c) $R(x) = 10x^2 - 2x$

(d) $S(x) = x^3 - x^2 + x - 1$

10. Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$. Déterminer les racines de P et Q en fonction de a et b où $P(x) = a^2x^2 + 2ax + 1$ et $Q(x) = ax^2 + bx + b$.

11. Soit m un paramètre réel, et $P(x) = mx^2 + (m-1)x+1$. Déterminer le nombre de racines de P en fonction de la valeur du paramètre m.

12. Déterminer les polynômes P vérifiant la relation :

$$\forall x \in \mathbf{R} : P(2x) = 2P(x)$$

13. Étudier les variations des polynômes suivants :

(a) $P(x) = 2x^3 + x^2 - 8x - 2$

(b) $Q(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 1$

(c) $R(x) = x^{17} + x^3 - 108$

(d) $S(x) = x^4 - x^3 + x^2$

14. Tracer le graphe (la courbe) des fonctions polynomiales suivantes dans un repère orthonormé.

(a) $P(x) = x^2 + 2x + 1$

(b) $Q(x) = x^3$

(c) $R(x) = x^2 - x^3 + 2x - 2$

(d) $S(t) = (x+1)^3 + 1$