Corrigé du Test n°2 du 18/09

1_ Voir cours

2_ Posons pour tout $n \geq 2$, $P(n) =$ " $\sum_{i=1}^{n} 3^i = \frac{3^{n+1} - 3}{2}$ "

- Initialisation: $\sum_{i=1}^{2} 3^i = 3 + 3^2 = 12$ et $\frac{3^3 - 3}{2} = \frac{27-3}{2} = 12$.

  $P(2)$ est vrai.

- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$.

  On calcule $\sum_{i=1}^{n+1} 3^i = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} 3^i + 3^{n+1} = \frac{3^{n+1} - 3}{2}}_{P(n)} + \frac{2 \cdot 3^{n+1}}{2} = \frac{3 \cdot 3^{n+1} - 3}{2}$

  $= \frac{3^{n+2} - 3}{2}$

  donc $P(n+1)$ est vrai. Donc $P(n)$ est héréditaire

Par principe de récurrence, $P(n)$ vrai pour tout $n \geq 2$.

3_ $u_0 = 2$; $u_1 = 2 + 3$; $u_2 = 2 + 3 + 3$ On conjecture alors :

$P(n) =$ " $u_n = 2 + 3n$ "

I : $u_0 = 2$ et $2 + 3 \cdot 0 = 2$. $P(0)$ est vrai.

- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$.

  Calculons $u_{n+1} = u_n + 3 = 2 + 3n + 3 \overset{P(n)}{=} 2 + 3(n+1)$: $P(n+1)$ est vrai.

  Donc $P(n)$ est héréditaire

  Par principe de récurrence, $P(n)$ vrai pour tout $n \geq 0$

4_ $\forall n \geq 1$, $n! = \prod_{i=1}^{n} i$. $\frac{(n+2)!}{n!} = (n+2)(n+1)$.

5– Si M. Brignon ne dort pas paisiblement alors au moins un étudiant en ECG-1 n'a pas appris son cours.

6–
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \overset{\text{astuce}}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k(k+1)} - \frac{k}{k(k+1)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \overset{\text{télescopage}}{=} 1 - \frac{1}{n+1}.$$