Applications et Polynômes

I- Applications

Définition : Soient E et F deux ensembles. Une application de E dans F est une relation entre ces deux ensembles qui à tout élément x de E (qu'on appelle l'ensemble de départ ou ensemble de définition) associe un unique élément $f(x)$ de F (l'ensemble d'arrivée).

On la note $f : E \longrightarrow F$, $x \longmapsto f(x)$. $f(x)$ est l'image de x par f, x est un antécédent de $f(x)$ par f.

exemples : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto e^x$; $g : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $A \longmapsto \overline{A}$; $h : \mathcal{P}([\![1,n]\!]) \longrightarrow \mathbb{N}$, $A \longmapsto \mathrm{Card}(A)$

Définition : Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ des applications. On définit la composée $g \circ f : E \longrightarrow G$, $x \longmapsto g(f(x))$.

Remarque : On peut composer plus de 2 applications : $h \circ f \circ g$ à condition que les ensembles "s'emboîtent" correctement. Cette opération est associative : $h \circ f \circ g = h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g$, mais non commutative : $f \circ g \neq g \circ f$:

si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x+1$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2$: $g \circ f(x) = (x+1)^2$, $f \circ g(x) = x^2+1$

En général $f \circ g$ et $g \circ f$ n'existent pas en même temps.

Cas des fonctions réelles :

- On vous demandera, une expression $f(x) = \dots$ étant donnée, de déterminer $\mathcal{D}_f$ (l'ensemble de définition de f).

Il s'agit de trouver tous les $x \in \mathbb{R}$ tels que $f(x)$ existe.

Par exemple si $f(x) = \ln(2x+1) + \frac{1}{x}$.

$x \in \mathcal{D}_f \iff 2x+1 > 0$ et $x \neq 0$

$\iff x > -\frac{1}{2}$ et $x \neq 0$

donc $\mathcal{D}_f =]-\frac{1}{2}, 0[\cup]0, +\infty[$.

Définition : Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

- On dit que f est injective (de E dans F) si tout élément de F possède au plus un antécédent dans E.

Autrement dit : $\forall (x,y) \in E^2, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

- On dit que f est surjective (de E dans F) si tout élément de F possède au moins un antécédent dans E.

Autrement dit : $\forall y \in F, \exists x \in E \mid f(x) = y$.

- On dit que f est bijective (de E dans F) si f est injective et surjective.

Autrement dit : $\forall y \in F, \exists ! x \in E \mid f(x) = y$.

exemples : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ n'est ni injective (1 a 2 antécédents : 1 et -1) ni surjective (-1 n'a pas d'antécédents)
$x \longmapsto x^2$

$g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ est injective.
$x \longmapsto x^2$

$h : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est bijective.
$x \longmapsto x^2$

Définition : Soit $f : E \longrightarrow F$ une application bijective.

Comme : $\forall y \in F, \exists ! x \in E / f(x) = y$. On peut donc définir une nouvelle application, notée $f^{-1} : F \longrightarrow E$

$$y \longmapsto x \quad (\text{où } f(x) = y)$$

On l'appelle la bijection réciproque de f : c'est l'application qui à tout élément de y associe l'unique antécédent de y par f.

exemples : $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est bijective et $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$

$x \longmapsto x^2$ $\qquad$ $x \longmapsto \sqrt{x}$.

$g : \mathbb{R}_- \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est bijective et $g^{-1} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_-$

$x \longmapsto x^2$ $\qquad$ $x \longmapsto -\sqrt{x}$

$h : \mathbb{R} \longrightarrow]0, +\infty[$ est bijective de $h^{-1} :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto e^x$ $\qquad$ $x \longmapsto \ln x$

Proposition : On note, pour E un ensemble, $id_E : E \longrightarrow E$ l'application identité

$x \longmapsto x$ de E.

- Soit $f : E \longrightarrow F$ bijective, on a alors :
$$f \circ f^{-1} = id_F \quad \text{et} \quad f^{-1} \circ f = id_E$$
- Soit $f : E \longrightarrow F$. S'il existe $g : F \longrightarrow E$ vérifiant :
$$f \circ g = id_F \quad \text{et} \quad g \circ f = id_E$$
alors f est bijective et $g = f^{-1}$.

Remarque : En pratique, pour étudier la bijectivité d'une application f, on cherche à résoudre l'équation $f(x) = y$ où $y \in F$ et d'inconnue $x \in E$.

- Si cette équation a une unique solution pour tout y alors f est

bijective et on exprime f^{-1}.

- Si l'équation a plusieurs solutions pour chaque y, f est surjective mais pas injective.
- Si l'équation n'a pas de solutions pour certains y, f n'est pas surjective.

<u>exemple:</u> Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto 2x+1.$$

On va résoudre $f(x) = y$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ où $y \in \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow 2x+1 = y \Leftrightarrow 2x = y-1 \Leftrightarrow x = \frac{y-1}{2}.$$

On trouve une unique solution donc f est bijective et $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{x-1}{2}.$$

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto (x-1)^2$$

On va résoudre $f(x) = y$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 = y$$

- Si $y < 0$, il n'y a pas de solutions donc f n'est pas surjective (dans $\mathbb{R}_+$)
- Si $y \geq 0 \Leftrightarrow x-1 = \sqrt{y}$ ou $-\sqrt{y}$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{y}+1 \text{ ou } -\sqrt{y}+1$$

donc, quand $y > 0$, il y a 2 solutions, donc f n'est pas injective.

<u>Proposition:</u> Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ bijectives.

$g \circ f : E \longrightarrow G$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

<u>Preuve:</u> Soit $y \in G$, on cherche $g \circ f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$

$\Leftrightarrow f(x) = g^{-1}(y)$ (car g^{-1} existe comme g est bijective)

$\Leftrightarrow x = f^{-1} \circ g^{-1}(y)$ (idem pour f^{-1}).

L'équation a une unique solution donc $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Définition: Soit $f : E \to F$ et $A \subset E$. On appelle restriction de f à A l'application

$$f_{|A} : A \longrightarrow F$$
$$x \longmapsto f(x).$$

Remarque: Cela revient à étudier une application sur un ensemble plus petit, l'intérêt est d'obtenir une nouvelle application qui est, elle, injective, si on choisit correctement la restriction.
On peut gagner de l'injectivité avec une restriction, mais pas de la surjectivité (car on a, en général, moins d'images en restreignant).

2_ Polynômes.

Définition: Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, on dit que f est une fonction polynomiale s'il existe $n \in \mathbb{N}$, et $n+1$ réels $a_0, a_1, \dots, a_n$ $(a_n \neq 0)$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$.

- Les réels $a_0, \dots, a_n$ sont appelés les coefficients de f et ils sont uniques (admis).
- L'entier n est appelé le degré de f ($\deg f$) et a_n le coefficient dominant de f.
  Si f est la fonction nulle, on pose dans ce cas $\deg f = -\infty$.
- L'ensemble des fonctions polynomiales est noté $\mathbb{R}[x]$ ("$\mathbb{R}$ crochet x").

Remarques: Les fonctions constantes non nulles sont donc polynomiales de degré 0.
Les trinômes du second degré sont les fonctions polynomiales de degré 2.
Les fonctions affines $x \longmapsto ax+b$ $(a \neq 0)$ sont polynomiales de degré 1.

Propriété: Soit $P, Q \in \mathbb{R}[x]$.

- Si $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $\deg(\lambda P) = \deg(P)$
- $\deg(P.Q) = \deg P + \deg Q$.
- $\deg(P+Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$

Remarque: $P.Q$ signifie la fonction polynomiale : $x \longmapsto P(x).Q(x)$
$P+Q$ signifie la fonction polynomiale : $x \longmapsto P(x)+Q(x)$

⚠ On peut diviser des polynômes mais le résultat n'est plus, en général, un polynome.
Par exemple: $f : x \longmapsto \frac{x+1}{x^2+1}$ n'est pas un polynôme, f n'a donc pas de degré.

Définition / Corollaire: On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[x] = \{P \in \mathbb{R}[x] \,/\, \deg P \leq n\}$.

- Si P et $Q \in \mathbb{R}_n[x]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $P + \lambda Q \in \mathbb{R}_n[x]$.

Remarque : On dit que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par combinaison linéaire.

Définition : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On dit que le réel α est racine de P si $P(\alpha)=0$.

Proposition (Division euclidienne) : Soit $A \in \mathbb{R}[X]$, $B \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$.

Il existe un unique $Q \in \mathbb{R}[X]$, et un unique $R \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\deg R < \deg B$ vérifiant $A = BQ + R$.

On appelle cette écriture la division euclidienne de A par B

R s'appelle le reste (de degré plus petit que B), B le diviseur, Q le quotient.

Méthode de la division euclidienne :

Faisons la division de X^3+2X^2-1 par $X+3$:

X^3+2X^2-1	$X+3$
$-(X^3+3X^2)$	X^2-X+3
$-X^2-1$	
$-(-X^2-3X)$	
$3X-1$	
$-(3X+9)$	
-10	

Donc on a $\underbrace{X^3+2X^2-1}_{A} = \underbrace{(X+3)}_{B}\underbrace{(X^2-X+3)}_{Q} \underbrace{-10}_{R}$

⚠ On s'arrête lorsque le reste est de degré strictement plus petit que le diviseur, pas avant !

Corollaire : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, $\alpha \in \mathbb{R}$

α est racine de P si et seulement si il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = Q(X)(X-\alpha)$.

On dit que P se factorise par $(X-\alpha)$.

Preuve : $\Rightarrow$ Soit α racine de P. Écrivons la division euclidienne de P par $x-\alpha$:

$$P(x) = Q(x)(x-\alpha) + R(x)$$

où $\deg R < \deg(x-\alpha) = 1$ donc R est constant égal à $\beta \in \mathbb{R}$.

donc $P(x) = Q(x)(x-\alpha) + \beta$

Comme $P(\alpha) = 0$, on a : $0 = Q(\alpha)(\alpha-\alpha) + \beta$ i.e $\beta = 0$ ie $P(x) = Q(x)(x-\alpha)$.

$\Leftarrow$ Supposons que P se factorise par $x-\alpha$, alors $P(\alpha) = Q(\alpha)(\alpha-\alpha) = 0$.

Proposition : Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, si P a au moins $n+1$ racines alors P est nul.

Remarque : Le polynôme nul admet une infinité de racines (tous les réels) et c'est le seul. Les polynômes constants non nuls n'ont pas de racines, mais ce ne sont pas les seuls, par exemple $P(x) = x^2+1$ n'en a pas car, pour tout $x \in \mathbb{R}$ $P(x) \geq 1 > 0$.

Propriété : Soit $P(x) = ax^2+bx+c$ où $a \neq 0$, $b, c \in \mathbb{R}$, un trinôme.

On appelle discriminant de P le réel $b^2 - 4ac$ (souvent noté Δ).

- Si $\Delta < 0$, P n'a aucune racine et $P(x)$ a le même signe que a pour tout réel x.
- Si $\Delta = 0$ P a une seule racine : $\frac{-b}{2a}$ et $P(x)$ a le même signe que a pour tout réel x.
- Si $\Delta > 0$ P a deux racines : $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $P(x)$ a le signe de a en dehors des racines, et le signe contraire à a entre ses racines.

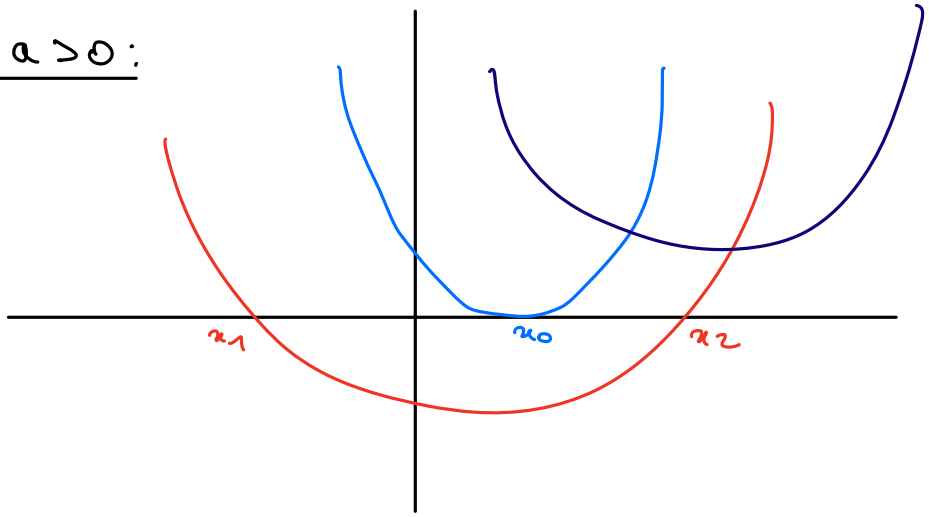
De plus, si on note x_1 et x_2 ces racines, on a : $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$

Remarque: La dernière relation, appelée, "relations coefficients racines" permet de déduire la 2ème racine si on connait la première :

$2x^2 - 3x + 1$ admet 1 comme racine ($2\times1^2 - 3\times1 + 1 = 0$) donc la seconde vaut $\frac{1}{2}$.

Graphiquement : Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$

Cas où $a > 0$:

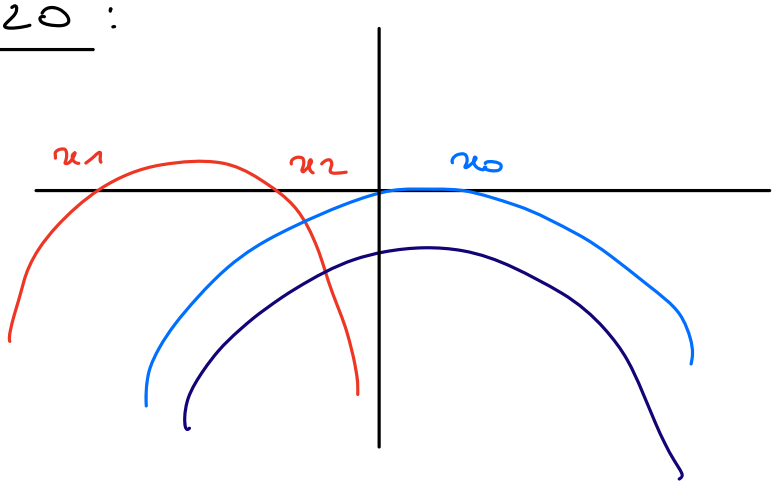


$\Delta > 0$

$\Delta = 0$

$\Delta < 0$

Cas où $a < 0$:



$\Delta > 0$

$\Delta = 0$

$\Delta < 0$

Méthode pour factoriser un polynôme :

- Si $P(x) = ax^2 + bx + c$, on calcule le discriminant Δ.

- Si $\Delta > 0$, on a donc $P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$
- Si $\Delta = 0$, on a donc $P(x) = a(x-x_0)^2$
- Si $\Delta < 0$, on ne peut pas factoriser P.

- Si $\deg P > 2$. On cherche une racine "évidente" : $x = -1$, 0 ou 1.

Puis on fait la division euclidienne.

<u>exemple:</u> Si $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$

On remarque que $P(1) = 0$ donc P se factorise par $x-1$.

Faisons donc la D.E. de P par $x-1$:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x^2 + x - 1 & x - 1 \\ -(x^3 - x^2) & \hline \\ \hline x - 1 & x^2 + 1 \\ -(x-1) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

donc $x^3 - x^2 + x - 1 = (x-1)(x^2+1)$

Enfin on ne peut pas plus factoriser car le discriminant de x^2+1 est strictement négatif.

3_ Compléments - Hors Programme

Preuve de la division euclidienne: Fixons $B \in \mathbb{R}[X]$ non nul.

① Montrons l'existence d'une division euclidienne.

Traitons le cas où $\deg A = -\infty$, dans ce cas $A = 0 = B \times 0 + 0$ où $\deg 0 < \deg B$.

Pour le cas où $\deg A \geq 0$:

Prouvons le résultat par récurrence forte sur $n = \deg A$, posons donc :

$P(n) =$ " $\forall A \in \mathbb{R}[X]$ de degré n, $\exists ! (Q,R) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}_{\deg B - 1}[X] \ / \ A = BQ + R$ "

- $n = 0$. Dans ce cas $A = \alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}^*$, distinguons deux cas selon $\deg B$.
  - si $\deg B = 0$, $B = \beta \in \mathbb{R}^*$ donc $A = BQ + 0$ où $Q = \frac{\alpha}{\beta}$.
  - si $\deg B \geq 1$, $A = 0 \cdot Q + \alpha$ et $\deg \alpha = 0 < \deg B$.
- Hérédité : Supposons $P(n)$ vraie pour un entier $n \geq 0$. Soit donc A de degré $n+1$.

  Distinguons deux selon que :
  - $\deg B > \deg A$. Alors $A = B \cdot 0 + A$ et $\deg A < \deg B$.
  - $\deg B \leq \deg A$. Notons déjà que A s'écrit $a_{n+1} X^{n+1} + P_A$ où $P_A \in \mathbb{R}_n[X]$

    B s'écrit $b_p X^p + P_B$ où $p = \deg B$ et $\deg P_B \in \mathbb{R}_p[X]$.

  On a donc $\underbrace{A - \frac{a_{n+1}}{b_p} X^{n+1-p} B}_{\text{Remarquez que cela correspond à ce qu'on fait dans la méthode pratique de la division euclidienne.}} \in \mathbb{R}_n[X]$, notons le C.

  Comme $C \in \mathbb{R}_n[X]$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence :
  (la récurrence est faite car en général C n'est pas de degré exactement n).

  $C = BQ + R$ où $\deg R < \deg B$, on réalise alors le miracle :

  $A = C + \frac{a_{n+1}}{b_p} X^{n+1-p} B = B\left(Q + \frac{a_{n+1}}{b_p} X^{n+1-p}\right) + R$ où $\deg R < \deg B$.

On a donc une D.E de A par B, ce qui achève la récurrence.

② Montrons l'unicité de la décomposition :

Soient $A = BQ + R$ et $A = BQ_1 + R_1$ deux divisions euclidiennes.

Ainsi $BQ + R = BQ_1 + R_1$

donc $B(Q - Q_1) = R_1 - R$

or $\deg(R_1 - R) < \deg B$ car R et R_1 sont des restes dans la D.E par B.

donc, nécessairement $Q - Q_1 = 0$ et donc $R_1 - R = 0$.

Relations coefficients racines généralisées :

Considérons un polynôme P de degré n ($n \geq 1$) : $P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$.

Supposons de plus qu'il admette n racines $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Par propriété P se factorise donc : $P(x) = a_n (x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_n)$.

- $(-1)^n \frac{a_0}{a_n} = \alpha_1 \dots \alpha_n$
- $\frac{-a_{n-1}}{a_n} = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$

Preuve : • $P(0) = a_0 + a_1 \cdot 0 + \dots + a_n 0^n = a_0$ et $P(0) = a_n (0 - \alpha_1) \dots (0 - \alpha_n) = a_n (-1)^n \alpha_1 \dots \alpha_n$.

donc $\alpha_1 \dots \alpha_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$.

• On développe $P(x) = a_n (x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_n)$ } pour avoir du x^{n-1} on choisit $n-1$ fois x et 1 fois un α_i dans les n facteurs.

$= a_n x^n + a_n x^{n-1} (-\alpha_n - \alpha_{n-1} - \dots - \alpha_0) + \dots$

On identifie le coefficient devant x^{n-1} : $a_{n-1} = a_n (-\alpha_n - \alpha_{n-1} - \dots - \alpha_0)$