

Fonctions usuelles

1 - Propriétés graphiques des fonctions

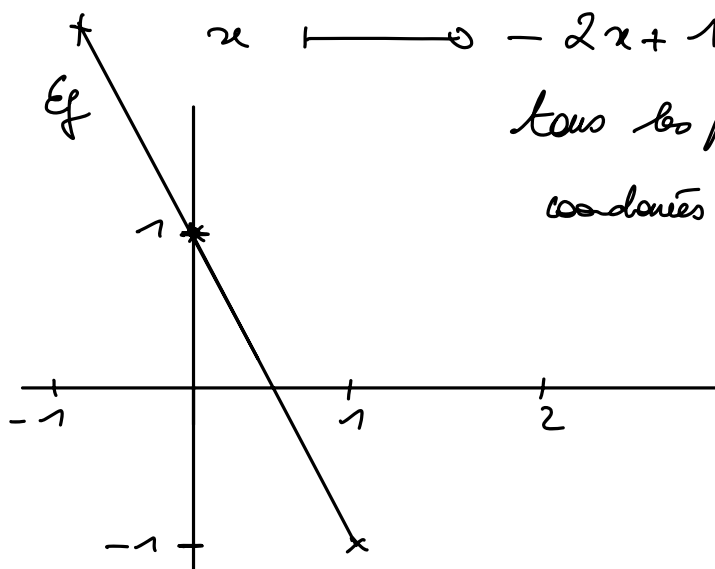
On étudie ici des fonctions définies sur des intervalles (c'est-à-dire des parties de $\mathbb{R}$ sans "trous" : $[0, 2]$; $]-4, 7]$; $]-\infty, 1]$; $\mathbb{R}$; $\mathbb{R}^+$) ou sur des réunions finies d'intervalles ($[0, 1] \cup [2, 4]$; $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ etc.) et à valeurs dans $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire que $f(x) \in \mathbb{R}$).

Définition: On appelle le graphe d'une fonction $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ($A \subset \mathbb{R}$).

l'ensemble du plan $\mathbb{R}^2$: $\{ (x, f(x)) \mid x \in A \} = E_f$.

Ce sont l'ensemble des points d'abscisse x (les éléments de l'ensemble de définition de f) et d'ordonnée $f(x)$ (l'image de x).

exemple: si $f: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$



Tous les points de E_f ont pour coordonnées $(x, f(x))$ où $x \in [-1, 2]$.

Définition: On dit que $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ est

- croissante sur A si: $\forall (x,y) \in A^2, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

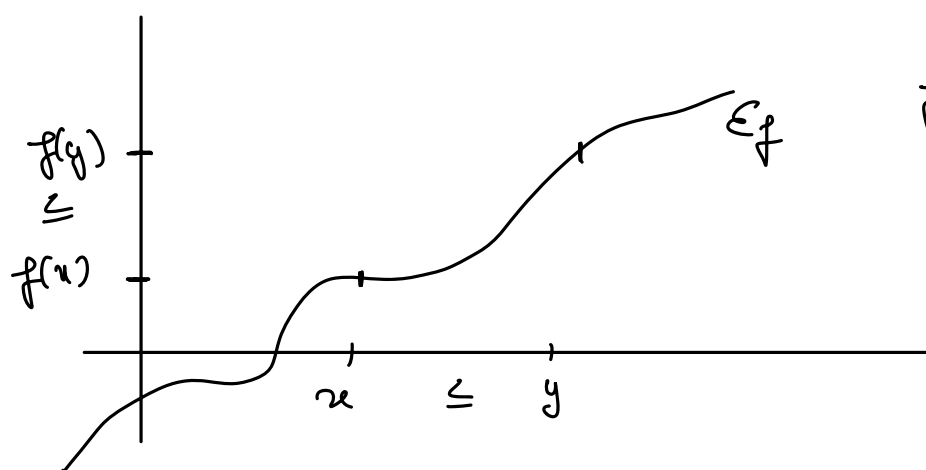
- décroissante sur A si: $\forall (x,y) \in A^2, x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$

Si f est croissante ou décroissante sur A , on dit qu'elle est monotone.

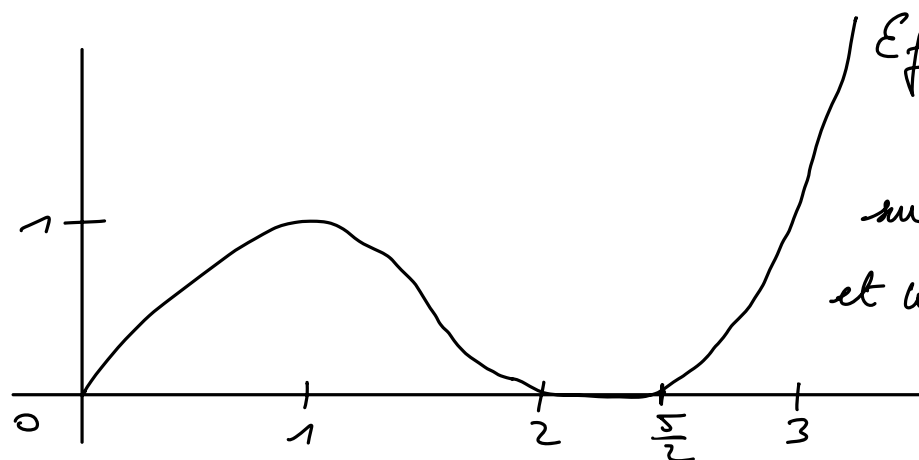
- strictement croissante sur A si: $\forall (x,y) \in A^2, x < y \Leftrightarrow f(x) < f(y)$

- strictement décroissante sur A si: $\forall (x,y) \in A^2, x < y \Leftrightarrow f(x) > f(y)$

On dit, dans l'un de ces deux cas, que f est strictement monotone sur A .



f est (strictement) croissante



f est croissante sur $[0,1]$, décroissante sur $[1,2]$ (et même $[1, \frac{3}{2}]$), et croissante sur $[\frac{3}{2}, 3]$ (et même sur $[2,3]$).

Remarques : . Une fonction constante est croissante et décroissante au même temps (mais pas strictement).

- Une fonction croissante sur I et croissante sur J ne l'est pas nécessairement sur $I \cup J$:

dans l'exemple $f(1)=1$ et $f(2)=0$ donc f n'est pas croissante sur $[0,1] \cup [2,3]$, pourtant elle l'est sur $[0,1]$ et sur $[2,3]$.

Intérêt pratique: les fonctions strictement monotones permettent de travailler par $\Leftrightarrow$ sur des inégalités. On les utilise donc pour résoudre des inéquations.

Définition: Soit $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ où A est centrée en 0 (cela signifie que si $x \in A$ alors $-x \in A$). On dit que :

- f est paire sur A si: $\forall x \in A: f(-x) = f(x)$.
- f est impaire sur A si: $\forall x \in A: f(-x) = -f(x)$.

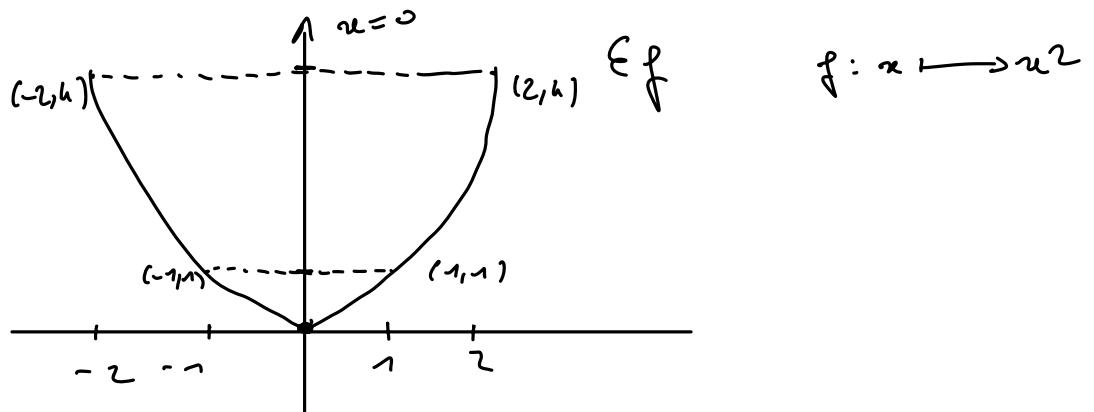
Exemples: $x \mapsto x^2$; $x \mapsto x^4 + 1$; $x \mapsto e^x + e^{-x}$ sont paires sur $\mathbb{R}$

$x \mapsto x^3$; $x \mapsto e^x - e^{-x}$ sont impaires sur $\mathbb{R}$.

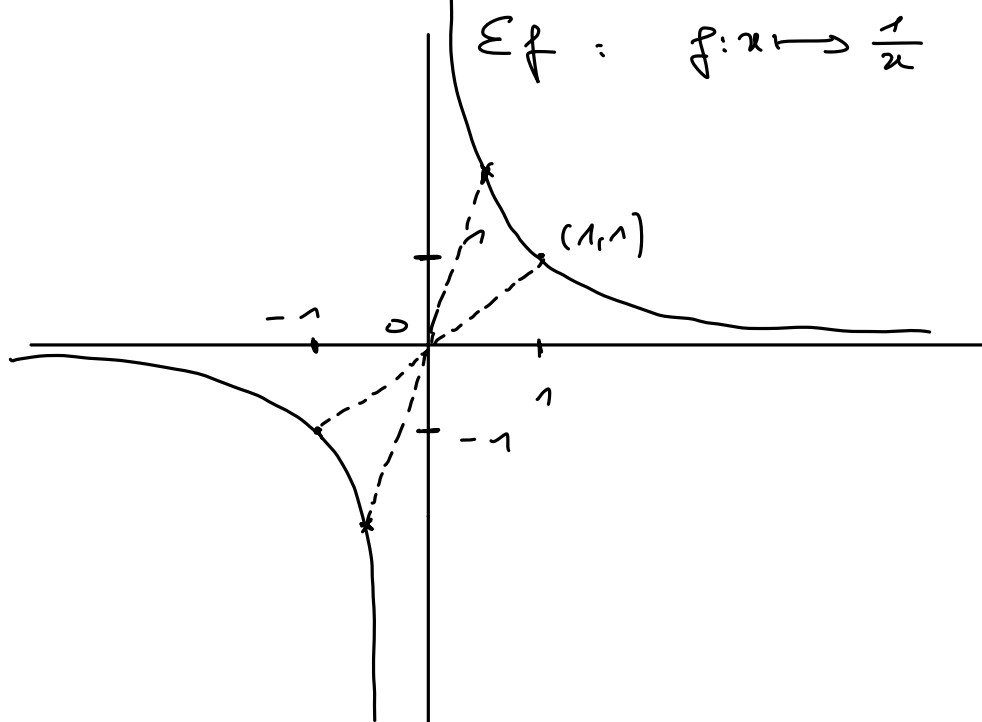
$x \mapsto \frac{1}{x}$; $x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ sont impaires sur $\mathbb{R}^*$.

Graphiquement: f est paire si et seulement si sa courbe a un axe de symétrie en l'axe des ordonnées.

Voir :



f est impaire si et seulement si sa courbe a un centre de symétrie en $(0,0)$.



Remarque: Si f est impaire et définie en 0, nécessairement $f(0) = 0$.

Position relative de deux courbes: Soient f et g définies sur un même ensemble A de $\mathbb{R}$. Étudier la position relative de leur courbe revient à résoudre l'inéquation: $f(x) \geq g(x)$ d'inconnue $x \in A$.

exemple: $f: x \mapsto x^2 - 1$ et $g: x \mapsto 2x$ sur $\mathbb{R}$.

On résout $f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow x^2 - 1 - 2x \geq 0$

On calcule discriminant de ce trinôme: 8. Deux racines: $1 + \sqrt{2}$ et $1 - \sqrt{2}$.

donc $f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow x \in]-\infty, 1 - \sqrt{2}] \cup [1 + \sqrt{2}, +\infty[$

Donc E_f est au dessus de E_g sur $] -\infty, 1 - \sqrt{2}] \cup [1 + \sqrt{2}, +\infty[$,
 E_f est en dessous de E_g sur $[1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}]$.

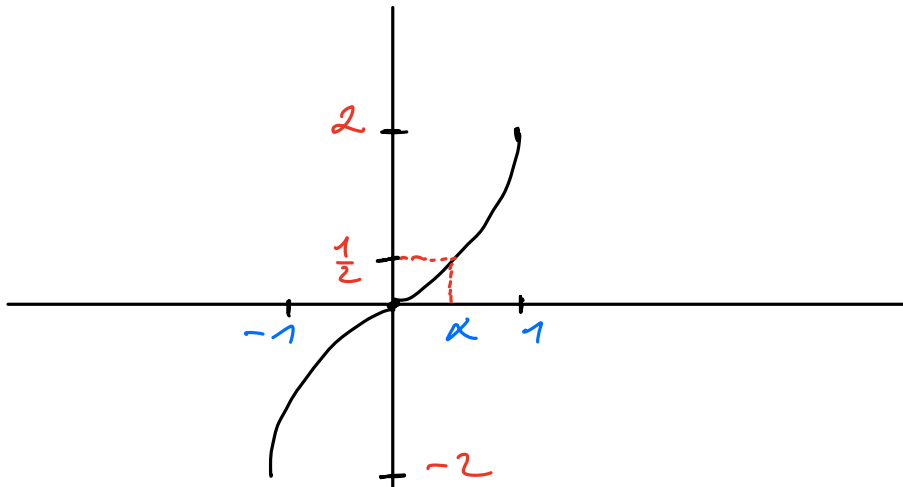
Théorème de la bijectivité: Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ où I est un intervalle. Si f est continue et strictement monotone sur I , alors f est bijective de I dans $f(I)$ et $f(I)$ est un intervalle.

Remarque: Nous revenons ce théorème bientôt. Envoi une application:

$$\text{Soit } f: x \mapsto x^3 + x \\ [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

f est continue (nous verrons plus tard pourquoi) et strictement croissante sur $[-1, 1]$ (car: $\forall x \in [-1, 1] \quad f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$), donc elle est bijective de $[-1, 1]$ dans $[f(-1), f(1)] = [-2, 2]$.

On peut donc en déduire, par exemple, que, comme $\frac{1}{2} \in [-2, 2]$, $\frac{1}{2}$ a un unique antécédent par f : $\exists! x \in [-1, 1] \mid f(x) = \frac{1}{2}$.



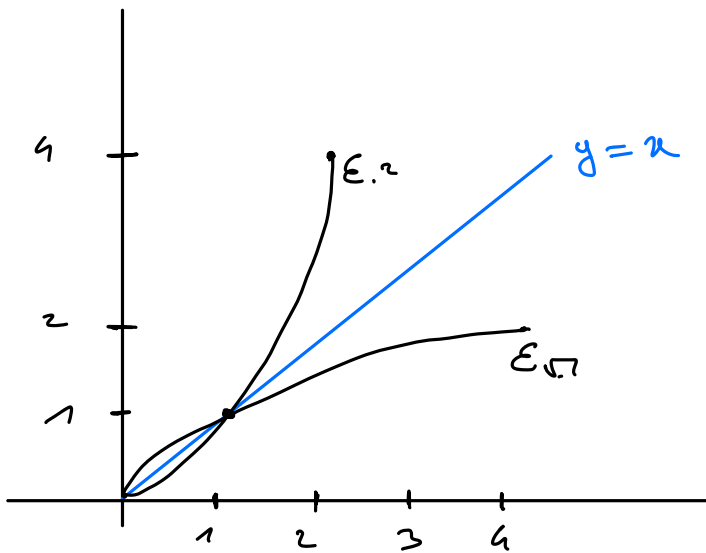
2 - Les fonctions usuelles

Définition: $x \mapsto x^2$ s'appelle la fonction carré.
 $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

Elle n'est pas bijective sur $\mathbb{R}$ car

elle est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Mais, elle est bijective de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, on appelle alors sa bijection réciproque la fonction racine carrée: $x \mapsto \sqrt{x}$
 $\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$



Les deux courbes sont symétriques par rapport à la droite $y = x$ en tant que réciproques l'une de l'autre.

- Propriété 1 Soit $a \geq 0$.
- $x^2 \leq a \Leftrightarrow -\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{a}$
 - $x^2 \geq a \Leftrightarrow x \geq \sqrt{a} \text{ ou } x \leq -\sqrt{a}$
 - $x^2 = a \Leftrightarrow x = \sqrt{a} \text{ ou } -\sqrt{a}$.
 - Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt{x^2} = x$.

Propriétés algébriques: $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$:

- $\sqrt{xy} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$.
- $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$.

Astuce de la quantité conjuguée: Si on veut étudier le signe d'une expression du type: $\sqrt{m^2+1} - 2m$, on peut écrire:

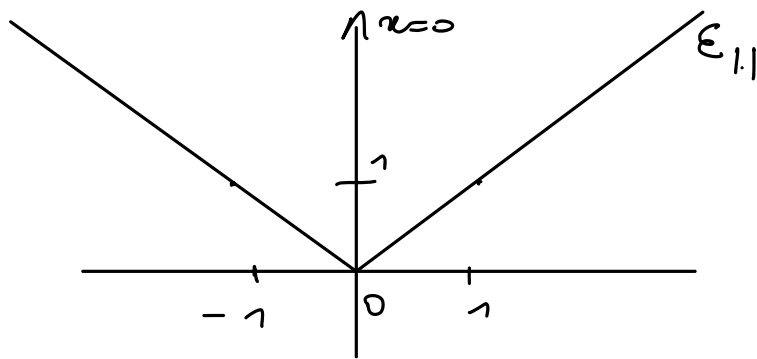
$$\begin{aligned} \sqrt{m^2+1} - 2m &= \frac{(\sqrt{m^2+1} - 2m)(\sqrt{m^2+1} + 2m)}{\sqrt{m^2+1} + 2m} \\ (a-b)(a+b) &= a^2 - b^2 \\ &= \frac{\sqrt{m^2+1}^2 - (2m)^2}{\sqrt{m^2+1} + 2m} = \frac{-3m^2+1}{\sqrt{m^2+1} + 2m} \end{aligned}$$

Quelques usages de calcul: On multiplie au numérateur les radicaux, par exemple:

$$\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4} \sqrt{2} = 2\sqrt{2}; \quad \sqrt{28} = \sqrt{4 \times 7} = 2\sqrt{7}.$$

On "rationalise" les radicaux: $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Définition: On appelle fonction valeur absolue : $x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$
 qui correspond à la distance entre 0 et x . Notée $|x|$



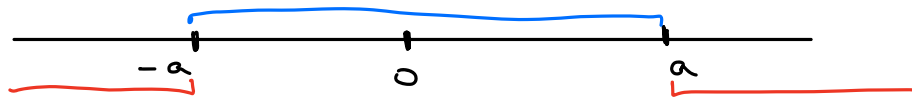
$$|0| = 0 ; |1| = 1 ; |-1| = 1 \dots$$

Propriétés: La fonction est paire : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|-x| = |x|$.

- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|xy| = |x| \cdot |y|$ et $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$ ($y \neq 0$)
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|x+y| \leq |x| + |y|$ (inégalité triangulaire)
- Soit $a \geq 0$: $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$

$$|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a \text{ ou } x \leq -a$$

$$|x| = a \Leftrightarrow x = a \text{ ou } x = -a$$



Remarque: La distance entre deux réels a et b vaut $|a-b|$

par exemple la distance entre -3 et -1 vaut $|-3 - (-1)| = |-2| = 2$.

celle entre 7 et -2 vaut $|7 - (-2)| = |9| = 9$.

Remarques: Penser à simplifier les calculs, par exemple:

$$|-a-b| = |-(a+b)| = |a+b| ; |2x-4| = |2||x-2| = 2|x-2|$$

$$\left| \frac{-1}{x+2} \right| = \frac{|-1|}{|x+2|} = \frac{1}{|x+2|}$$

Definition: On admet qu'il existe une unique fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant:

• $f(0) = 1$ et $f' = f$.

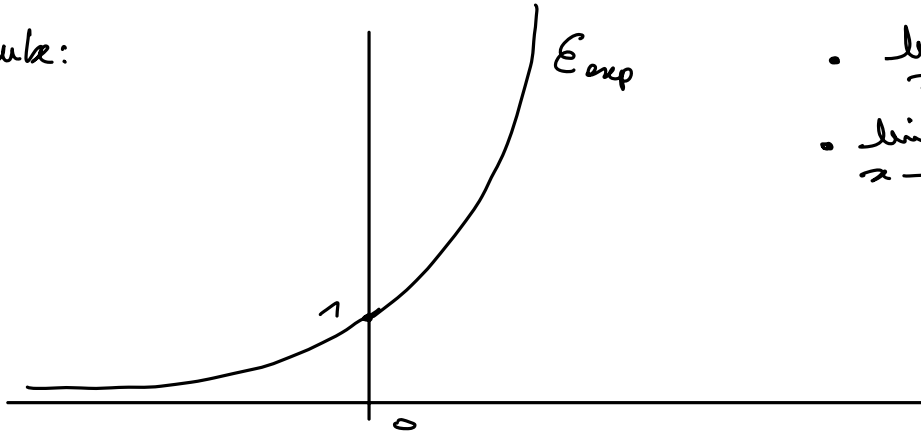
On appelle cette fonction $\exp$, on note plus simplement $\exp(x) = e^x$.

On admet les propriétés suivantes:

• $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad e^{x+y} = e^x \cdot e^y$

• $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x > 0$

Voici sa courbe:



• $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

Voici quelques relations algébriques supplémentaires:

• $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2: e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}, \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x} \text{ et } (e^x)^y = e^{xy}$

On rappelle aussi que si u est une fonction dérivable: $(e^u)' = u' \cdot e^u$.

Notamment, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, si $f(x) = e^{\alpha x}$, $f'(x) = \alpha e^{\alpha x}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Definition / Propriété: La fonction $x \mapsto e^x$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]0, +\infty[$, on appelle alors $\ln$ sa bijection réciproque:

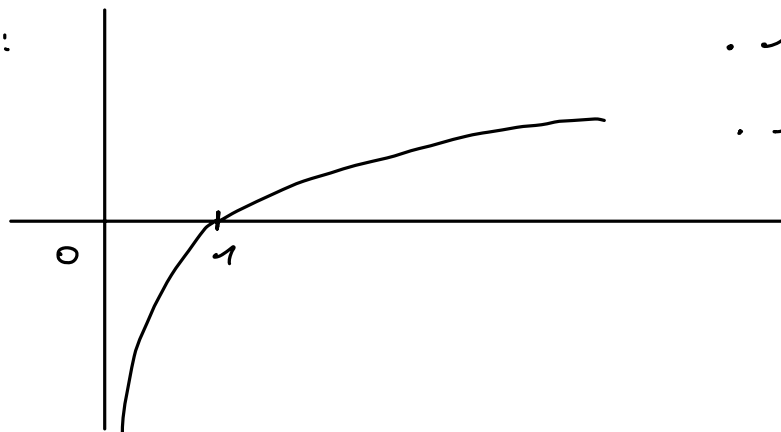
$\exp^{-1} = \ln: x \mapsto \ln(x)$

$]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

Voici sa courbe:

(obtenue par symétrie de

$E_{\exp}$ par rapport à la droite: $y = x$)



• $\ln 1 = 0$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$

On a les propriétés algébriques suivantes :

$$\begin{aligned} \bullet \forall (x, y) \in]0, +\infty[^2 : \ln(xy) &= \ln x + \ln y \\ \ln\left(\frac{x}{y}\right) &= \ln x - \ln y \quad \text{et} \quad \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x \\ \bullet \forall m \in \mathbb{Z}, \ln(x^m) &= m \ln x \end{aligned}$$

On rappelle aussi que si u est une fonction dérivable à valeurs dans $]0, +\infty[$,
 $\ln(u)' = \frac{u'}{u}$.

En tant que réciproque de exp, on a les relations :

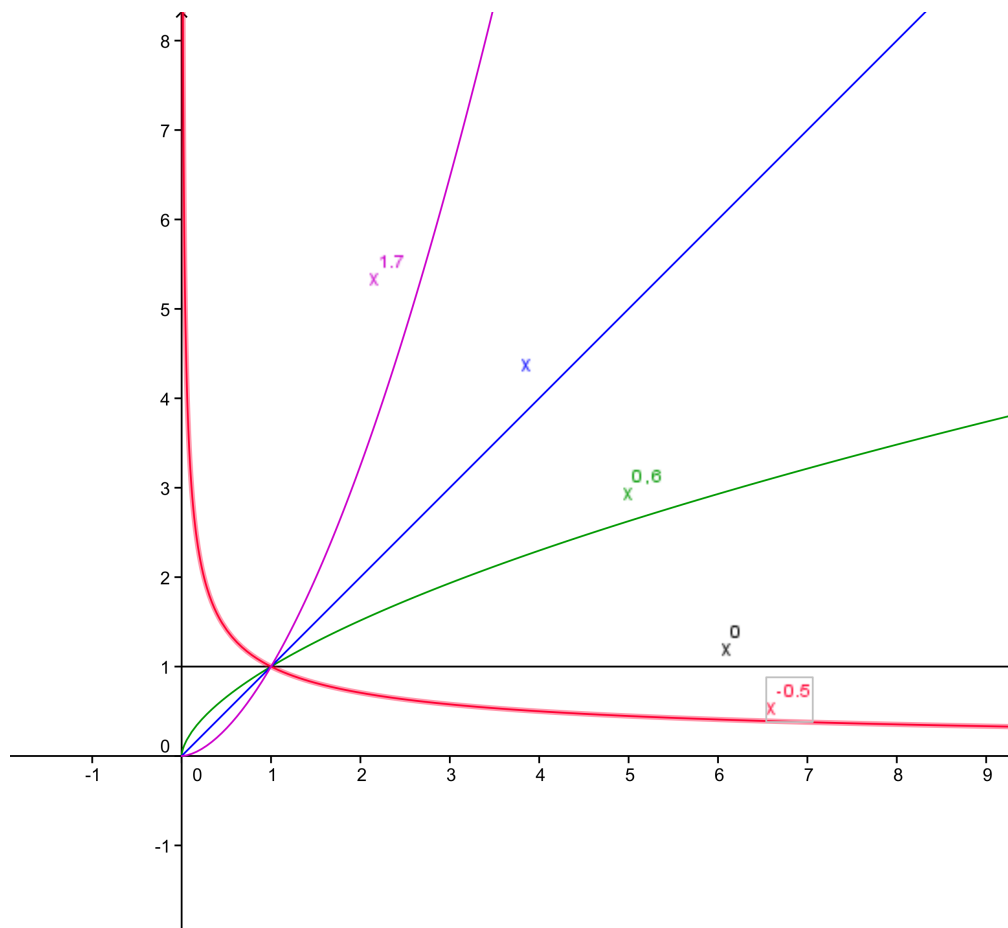
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \ln(e^x) = x \qquad \forall x > 0 \quad e^{-\ln x} = x.$$

Cette dernière relation s'appelle le passage à la forme exponentielle, utile pour résoudre des équations, notamment, si $x \in \mathbb{R}$ et $x > 0$:

$$x^\alpha = (e^{-\ln x})^\alpha = e^{\alpha \cdot \ln x}.$$

Fonctions puissances : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit la fonction f_α :

$$\begin{aligned} f_\alpha :]0, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^\alpha (= e^{\alpha \cdot \ln x}). \end{aligned}$$



- Si $\alpha < 0$ f_α est strictement décroissante et convexe sur $]0, +\infty[$
- Si $\alpha > 0$ f_α est strictement croissante sur $]0, +\infty[$
 De plus f_α est concave si $\alpha > 1$ et convexe si $0 < \alpha < 1$.

ex: Soit $m \in \mathbb{N}$, résolvons l'inéquation : $x^m \geq 2$

comme $f_{\frac{1}{m}}$ est strictement croissante ($\frac{1}{m} > 0$) sur $]0, +\infty[$, alors :

$$x^m \geq 2 \iff x \geq 2^{\frac{1}{m}}.$$

On pourrait aussi passer par la forme exponentielle :

$$x^m \geq 2 \iff e^{m \cdot \ln x} \geq 2 \quad \text{strict croissante de } t \mapsto \ln t$$

$$\iff m \cdot \ln x \geq \ln 2$$

$$\iff x \geq e^{\frac{\ln 2}{m}} = 2^{\frac{1}{m}} \quad \text{strict croissante de } t \mapsto e^t$$

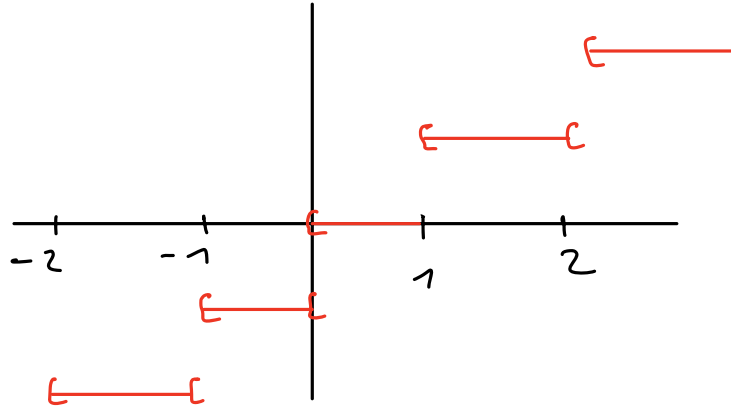
Définition:

On appelle fonction partie entière la fonction :

$$x \mapsto L(x) \text{ où } L(x) = \max \{ m \in \mathbb{Z} / m \leq x \}$$

$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à x .

Voici sa courbe :



On a donc les inégalités, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} x-1 &< L(x) \leq x \\ L(x) &\leq x < L(x)+1 \end{aligned}$$

exemple: Soit l'équation :

$$L(2x+1) = 2$$

$$\Leftrightarrow 2 \leq 2x+1 < 2+1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x < 1$$