Corrigé du Test 3

1 - (a) Comme $f(x) = \ln(x^2 - x + 1) + \sqrt{x}$,

$$x \in D_f \iff x^2 - x + 1 > 0 \text{ et } x \geq 0$$

Etudions $x^2 - x + 1$, ce trinôme a pour discriminant $(-1)^2 - 4\times1\times1 = -3 < 0$

Ainsi $x^2 - x + 1$ est strictement positif sur $\mathbb{R}$.

Donc $x \in D_f \iff x \geq 0$: $\boxed{D_f = [0, +\infty[}$

(b) Comme $g(x) = x^{10} + 10x - 101 + \dfrac{e^x + 10x^2}{-x^2 + x + 1}$,

$$x \in D_g \iff -x^2 + x + 1 \neq 0$$

Ce trinôme a pour discriminant $1^2 + 4 = 5 > 0$.

Donc il admet deux racines : $\dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2(-1)} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Ainsi : $D_g = \left]-\infty, \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right[\cup \left]\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[$

(c) $h(x) = \sqrt{2x+3} + \ln(x+1) - 1 + e^{1/x}$.

$$x \in D_h \iff 2x + 3 \geq 0 \text{ et } x + 1 > 0 \text{ et } x \neq 0$$

$$\iff x \geq \frac{-3}{2} \text{ et } x > 1 \text{ et } x \neq 0$$

Ainsi $\boxed{D_h =]1, +\infty[}$

2_ $x \longmapsto e^x$ est injective (car strictement croissante) et non surjective (car $e^x > 0$)
$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

3_ $x \longmapsto x^2$ est non injective ($(-1)^2 = 1^2$) et surjective, car,
$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}+$ pour tout $y \in \mathbb{R}+$, y a pour antécédents : $\sqrt{y}$ et $-\sqrt{y}$.

4_ (a) On étudie l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ où $y > -1$.

$$\Leftrightarrow \ln(e^{-x}+1) - 1 = y$$
$$\Leftrightarrow \ln(e^{-x}+1) = y+1$$
$$\Leftrightarrow e^{-x}+1 = e^{y+1}$$
$$\Leftrightarrow e^{-x} = e^{y+1} - 1$$ (car $y > -1$, $y+1 > 0$ donc $e^{y+1} - 1 > 0$
$$\Leftrightarrow -x = \ln(e^{y+1}-1)$$
$$\Leftrightarrow x = -\ln(e^{y+1}-1)$$

Il y a une seule solution donc f est bijective et $\boxed{\begin{array}{l} f^{-1} : y \longmapsto -\ln(e^{y+1}-1) \\ ]-1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \end{array}}$

(b) On résoud $f(x) = y$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ où $y \in \mathbb{R}+$

$$\Leftrightarrow (x+3)^2 = y$$ ($y \geq 0$
$$\Leftrightarrow x+3 = \sqrt{y} \text{ ou } x+3 = -\sqrt{y}$$
$$\Leftrightarrow x = \sqrt{y} - 3 \text{ ou } -\sqrt{y} - 3$$

Cela fait 2 solutions (quand $y > 0$) donc f n'est pas injective,
donc $\boxed{f \text{ n'est pas bijective.}}$

(c) $h(x) = y$

$\iff \ln(e^x - e^{-x}) = y$

$\iff e^x - e^{-x} = e^y$

$\iff e^x - e^{-x} - e^y = 0$ On pose $e^x = X$

$\iff X - \dfrac{1}{X} - e^y = 0$

$\iff \dfrac{X^2 - 1 - Xe^y}{X} = 0$

$\iff X^2 - 1 - Xe^y = 0$ Ce trinôme a pour discriminant $(-1)^2 - 4(e^y)^2$

$= 1 + 4e^{2y} > 0$.

Donc il y a deux racines : $X = \dfrac{e^y - \sqrt{1+4e^{2y}}}{2}$

ou $\dfrac{e^y + \sqrt{1+4e^{2y}}}{2}$

or $\dfrac{e^y - \sqrt{1+4e^{2y}}}{2} < 0$ (car $\sqrt{1+4e^{2y}} > \sqrt{4e^{2y}} = 2e^y$)

donc vu que $X > 0$ (car $X = e^x$), on ne retient que celle-ci.

Donc, comme $X = e^x$, $x = \ln\left(\dfrac{e^y + \sqrt{1+4e^{2y}}}{2}\right)$: une seule solution !

Donc h est bien bijective et $\boxed{h^{-1} : y \longmapsto \ln\left(\dfrac{e^y + \sqrt{1+4e^{2y}}}{2}\right)}$