TD : Fonctions usuelles

1. Résoudre les inégalité suivantes :
   (a) $|x+1| \leqslant 3$ dans $\mathbf{R}$
   (b) $|\frac{1}{x}| > 1$ dans $\mathbf{R}^*$.
   (c) $|e^x| < 1$ dans $\mathbf{R}$
   (d) $|x^2 - 3x + 2| \geqslant 2$ dans $\mathbf{R}$
   (e) $|x+1| \leqslant |x-1|$ dans $\mathbf{R}$

2. Résoudre les égalités suivantes dans $\mathbf{R}$:
   (a) $\lfloor x - 2 \rfloor = 7$
   (b) $\lfloor e^{2x} - 1 \rfloor = 0$
   (c) $\lfloor x^2 + x^{18} - 7x^{98} \rfloor = \dfrac{1}{4}$

3. Étudier la parité des fonctions suivantes en précisant leur domaine de définition :
   (a) $f(x) = x^2 + 6$
   (b) $f(x) = |x+1|$
   (c) $f(x) = \frac{-1}{x}$
   (d) $f(x) = e^{|x|} + 2$

4. Résoudre les inégalités suivantes :
   (a) $e^{3x-1} \leqslant 1$ dans $\mathbf{R}$
   (b) $e^{\frac{1}{x}} \leqslant 2$ dans $\mathbf{R}^*$
   (c) $e^{(x-1)^2} < 3$ dans $\mathbf{R}$
   (d) $e^{x^2} \geqslant e^{x-1}$ dans $\mathbf{R}$
   (e) $2^{x+1} \geqslant 1$ dans $\mathbf{R}$
   (f) $3^{\frac{1}{x}} > 3$ dans $\mathbf{R}^*$.

5. Préciser le domaine de définiton de ces expression et résoudre les inégalités suivantes dans le domaine correspondant :
   (a) $ln(-x+1) \leqslant 0$
   (b) $ln(x^2 - 2x + 1) > 0$
   (c) $1.01^n > 2$ où $n \in \mathbf{N}$
   (d) $0.99^n < \frac{1}{2}$ où $n \in \mathbf{N}$

6. Résoudre les équations suivantes en posant une substitution :
   (a) $e^{2x} - e^x + 1 = 0$
   (b) $2(ln(x))^2 - 1 + 3ln(x) = 0$
   (c) $2^x + 4^x = 2$

7. Étudier la parité des fonctions suivantes en n'oubliant pas de déterminer le domaine de définition :
   (a) $f(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$
   (b) $g(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1}$

8. On pose les fonctions définies par :

$$\forall x \in \mathbf{R} : ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ et } sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

   (a) Etudier la parité de ch et sh.
   (b) Montrer que $ch(x)^2 - sh(x)^2 = 1$
   (c) Montrer que $sh(2x) = 2sh(x)ch(x)$

9. Montrer les inégalités suivantes :
   (a) $\forall x \in \mathbf{R} : \frac{e^x+e^{-x}}{2} \leqslant e^{|x|}$
   (b) $\forall x \in \mathbf{R} : e^x \geqslant x + 1$
   (c) $\forall x > 0 : ln(x) \leqslant x - 1$
   (d) $\forall x \in \mathbf{R} : \frac{-x^2}{2} \leqslant e^{\frac{-x^2}{2}-1}$
   (e) $\forall x > 0 : \frac{x^2-1}{2} \geqslant ln(x)$
   (f) $\forall x > 0 : e^x \geqslant ln(x) + 2$

10. Tracer la courbe représentative des fonctions suivantes dans un repère orthogonal sur leur ensemble de défintion D_f :
   (a) $f(x) = x + |x|$ où $D_f = [-2, 2]$.
   (b) $f(x) = \lfloor |2x| \rfloor$ où $D_f = [-1, 1]$
   (c) (Difficile) $f(x) = \frac{1}{x} - \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$ où $D_f = \left[\frac{1}{4}, 3\right]$