TD : Applications et polynômes

1. Résoudre les systèmes linéaires suivants d'inconnues $(x, y) \in \mathbf{R}^2$:

(a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 6x = 7y - 1 \\ y = -x + 2 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$ (e) $\begin{cases} -x + y = 1 \\ 3x + y = 2 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} -x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \\ 4x - 4y = -4 \end{cases}$

2. Résoudre les systèmes linéaires suivants d'inconnues $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$:

(a) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y - z = 2 \\ 2x + 2y - 3z = 1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x - y = -1 \\ y - z = 2 \\ y + 2x = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} -x + y + 2z = 2 \\ -x + y + z = 0 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x = z + 2 \\ y = 2x + z \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ x + y + z = 4 \\ x + y + 2z = 2 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} y - 3z = -2 \\ x - y = 0 \end{cases}$

3. Résoudre les systèmes linéaires suivants en fonction de la valeur du paramètre $\lambda \in \mathbf{R}$:

(a) $\begin{cases} x + \lambda y = 0 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \lambda x + y = 1 \\ x + \lambda y = 1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + \lambda z = 3 \\ x + \lambda y + 3z = 2 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x + y + \lambda z = 2 \\ 3x + 4y + 2z = \lambda \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$

4. Déterminer des réels a, b et c tels que :
   (a) $\forall n \in \mathbf{N}^* : \frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$
   (b) $\forall n \geqslant 2 : \frac{5n^2+21n+22}{(n-1)(n+3)^2} = \frac{a}{n-1} + \frac{b}{n+3} + \frac{c}{(n+3)^2}$
   (c) $\forall n \geqslant 2 : \frac{1}{n^2-1} = \frac{a}{n-1} + \frac{b}{n+1}$

5. Résoudre les systèmes suivants d'inconues $(x, y, z, t) \in \mathbf{R^4}$:

(a) $\begin{cases} 3x + 2z = 0 \\ 3y + z + 3t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \\ 2x - y + z - t = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x + y + z - 3t = 1 \\ 2x + y - z + t = -1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ 3x - 3y + 3z + 2t = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 5x - 5y + 5z + 7t = 0 \end{cases}$

6. Déterminer un polynôme P de degré au plus 2 tel que

$$\mathrm{P}(1) = 1, \quad \mathrm{P}(2) = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{P}'(1) = 1.$$

7. (a) Déterminer $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ tels que pour tout réel $x \notin \{1; -3\}$:

$$\frac{5x^2 + 21x + 22}{(x-1)(x+3)^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3} + \frac{c}{(x+3)^2}.$$

   (b) En déduire une primitive de $f : x \in]1; +\infty[\mapsto \frac{5x^2+21x+22}{(x-1)(x+3)^2}$. *On rappelle que F est une primitive de f si F'=f.*

8. On considère le système suivant, où x, y et z sont des réels positifs :

$$\begin{cases} x^3y^2z^6 = 1 \\ x^4y^5z^{12} = 2 \\ x^2y^2z^5 = 3 \end{cases}$$

   (a) Est ce un système linéaire ?
   (b) Résoudre ce système en posant une substitution.