Systèmes linéaires

1 _ Vocabulaire.

<u>Définition</u> : Soient $p, m \in \mathbb{N}^*$, des réels $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq p}}$ et $(b_i)_{1 \leq i \leq m}$
On appelle système linéaire à p inconnues et n équations de coefficients (a_{ij}) et de second membre (b_i) le système d'équation :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} + \dots \qquad + a_{mp}x_p = b_m \end{cases}$$

où les inconnues sont les $x_1, \dots, x_p$.

Résoudre le système c'est trouver toutes les valeurs des inconnues $x_1, \dots, x_p$ qui vérifient les n équations simultanément.

<u>exemple</u> :

- $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$ est un système à 2 équations et à 2 inconnues : x et y.

- $\begin{cases} xy - y = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$ n'est <u>pas</u> un système linéaire.

<u>Vocabulaire</u> : • Si les b_i sont tous nuls, on dit que le système est homogène.
• Si le système ne possède pas de solutions, on dit que

le système est incompatible.

<u>exemple</u> :

- $\begin{cases} x + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$ est homogène

- $\begin{cases} x - y = 1 \\ -x + y = 2 \end{cases}$ est incompatible

<u>Vocabulaire</u> : On appelle système de Cramer un système à n équations et n inconnues possédant une unique solution.

<u>Vocabulaire</u> : On appelle système triangulaire tout système où chaque ligne fait apparaître (au moins) une inconnue en moins que la ligne au dessus d'elle, avec la condition que l'inconnue qui n'apparait plus de la ligne i à la ligne $i+1$, n'apparait plus dans toutes les lignes suivantes.

En gros, à chaque ligne, une variable disparait dans toutes les lignes suivantes.

<u>exemple</u> :

- $\begin{cases} x + 2x - z = 2 \\ y + 3z = 0 \\ z = 6 \end{cases}$

- $\begin{cases} 6x - 8y + 7z = 0 \\ 4y + 6z = 0 \end{cases}$

- $\{ x + y + z + t = 1$

- $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x + y = 1 \\ 3y = 2 \end{cases}$

sont tous triangulaires.

2 – Résolution des systèmes linéaires.

- **Cas des systèmes triangulaires :**

  - Cas d'un système triangulaire de Cramer :

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ \quad\;\; y + 2z = 0 \\ \qquad\;\; 2z = 4 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 2y + z = 10 & \leftarrow \text{idem avec } x \quad ③ \\ y = 0 - 2z = -4 & \leftarrow \text{on calcule } y \text{ en fonction de } z \quad ② \\ z = 2 & \leftarrow \text{on calcule } z \quad ① \end{cases}$$

On trouve une unique solution : $\{(10, -4, 2)\}$

  - Cas d'un système triangulaire avec moins d'équations que d'inconnues :

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ \quad\;\; 2y - z = 1 \end{cases}$$

on remplace z ②

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(-y - 2z) = \frac{1}{2}(-y - 4y + 2) = -\frac{5}{2}y + 1 \\ z = 2y - 1 & \leftarrow \text{on exprime une variable en fonction des autres} \quad ① \end{cases}$$

Ainsi les solutions sont $\{(-\frac{5}{2}y + 1, y, 2y - 1) \text{ où } y \in \mathbb{R}\}$

On a ici une infinité de solutions, car la valeur de y est libre.

<u>Remarque</u> : On aurait pu aussi exprimer y en fonction de z.
Le résultat a l'air différent mais les solutions sont les mêmes.

- Cas des systèmes linéaires non triangulaires.

<u>Définition</u> : On dit que deux systèmes sont équivalents s'ils possèdent les mêmes solutions.

<u>Proposition</u> : Les opérations élémentaires suivantes ne changent pas les solutions d'un système :

- Échanger la ligne i avec la ligne j : $L_i \longleftrightarrow L_j$
- Multiplier L_i par $\lambda \neq 0$: $L_i \longleftarrow \lambda L_i$
- Ajouter deux lignes : $L_i \longleftarrow L_i + L_j$

exemple : $\begin{cases} x+y = 0 \\ x-y = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y=0 \\ 2x=4 \end{cases} \quad L_2 \longleftarrow L_2+L_1$

$\iff \begin{cases} y = -x = -2 \\ x=2 \end{cases}$ donc $S = \{(2,-2)\}$.

<u>Le pivot de Gauss</u> :

Cette méthode permet de transformer tout système en système triangulaire, et donc de résoudre tous les systèmes (linéaires).

<u>exemple 1</u> :

$$\begin{cases} \boxed{x} + 2y - z = 0 \\ 2x - y + z = 1 \\ 3x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

on utilise ce x pour éliminer les x dans les lignes en dessous

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ \boxed{-5y} + 3z = 1 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ -5y + 5z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{cases}$$

on utilise ce y pour éliminer les y en dessous

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -5y + 3z = 1 \\ 2z = -2 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases}$$

Le système est triangulaire !

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = -2y + z = 2 + \frac{2}{5} = \frac{12}{5} \\ y = \frac{3z - 1}{5} = \frac{2}{5} \\ z = -1 \end{cases}$$

On peut remonter

Donc, unique solution : $\left\{\left(\frac{12}{5}, \frac{2}{5}, -1\right)\right\}$

<u>exemple 2</u> :

$$\begin{cases} 2x + 2y = 4 \\ 3x + 2y = 2 \\ 6x - y = 0 \end{cases} \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \boxed{-y} + 6x = 0 \\ 2y + 3x = 2 \\ 2y + 2x = 4 \end{cases}$$

on change un peu pour utiliser le y, ce sera plus simple

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -y + 6x = 0 \\ 15x = 2 & L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ 14x = 4 & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -y + 6x = 0 \\ x = \frac{2}{15} \\ x = \frac{2}{7} \end{cases}$$

Le système est incompatible (pas de solutions).

exemple 3 :

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 4y - z = 0 \\ 2x + 8y - 3z = 0 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}{\iff} \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 4y - z = 0 \\ \cancel{4y - z = 0} \end{cases}$$

Quand 2 lignes sont égales, on en supprime une

$$\iff \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 4y - z = 0 \end{cases}$$

Le système est triangulaire, donc on remonte :

$$\iff \begin{cases} x = z - 2y = 4y - 2y = 2y. \\ z = 4y \end{cases}$$

même chose qu'en dessous

On exprime une variable en fonction des autres

donc les solutions sont : $\{(2y, y, 4y)$ où $y \in \mathbb{R}\}$ (infinité de solutions)

3_ Structure des solutions (Partie théorique)

Pour un système linéaire à p inconnues, les solutions sont des éléments de $\mathbb{R}^p$.

On définit une addition et une multiplication externe sur $\mathbb{R}^p$:

Soient $X = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, $Y = (y_1, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^p$, $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$X + \lambda Y = (x_1 + \lambda y_1, \dots, x_p + \lambda y_p) \in \mathbb{R}^p.$$

Proposition : Soit (S_0) un système linéaire homogène.

Soient X et Y des solutions de (S_0) et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$X + \lambda Y$ est aussi solution de (S_0).

Proposition : Soit (S) un système linéaire et (S_0) le système homogène associé. Soit X_1 une solution de (S), alors, toute solution X de (S) s'écrit sous la forme $X = X_1 + X_0$ où X_0 est solution de (S_0).

Corollaire : Un système linéaire possède :

- ou bien aucune solution
- ou bien une seule solution
- ou bien une infinité de solutions.

Idée de preuve : $(0, \dots, 0)$ est toujours solution du système homogène (S_0).
Si (S_0) a une solution non nulle, disons X_0, comme, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λX_0 est aussi solution, alors il en a une infinité (tous les λX_0 sont différents quand $X_0 \neq (0, \dots, 0)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$).

exemple : Soit (S) : $\left\{ \begin{array}{l} x + y - z = 3 \\ 2x + 2y = 4 \end{array} \right.$

(S_0) : $\left\{ \begin{array}{l} x + y - z = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x + y - z = 0 \\ 2z = 0 \end{array} \right.$ $\quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$

$\iff \left\{ \begin{array}{l} x = -y \\ z = 0 \end{array} \right.$ $\quad$ Solutions de (S_0) : $\{(-y, y, 0)$ où $y \in \mathbb{R}\}$.

On remarque que $(1, 1, -5)$ est solution de (S), donc les solutions de S sont : $\{(-y + 1, y + 1, -5)$ où $y \in \mathbb{R}\}$.