

Suites récurrentes

Définition: Une suite est une liste infinie de réels.

On la note généralement $(u_n)_{n \geq 0} = (u_0, u_1, u_2, \dots)$.

On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites. u_n correspond au terme d'indice n de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ (c'est d'ailleurs le $(n+1)^{\text{ème}}$ terme).

On définit habituellement une suite de deux manières :

- En donnant une formule explicite : soit $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ une application, on définit la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ par :

$$\forall n \geq 0 \quad u_n = f(n).$$

exemple: $\forall n \geq 0 \quad u_n = e^n + 2n.$

- Par une relation de récurrence d'ordre 1 et un premier terme :
on donne u_p (le premier terme) et par la relation :

$$\forall n \geq p \quad u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{où } f \text{ est une fonction.}$$

exemple: $u_0 = 2$ et, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = 2u_n - 1.$

- Par une relation de récurrence d'ordre 2 et deux premiers termes :
on donne généralement u_0 et u_1 et la relation :

$$\forall n \geq 0 \quad u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1})$$

exemple: $u_0 = 1, u_1 = 3$ et, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n^2.$

Le but de ce cours est d'obtenir des formules explicites à partir de définition par récurrence.

Remarque: On peut imaginer des suites récurrentes d'ordre k où $k \geq 3$.

Par exemple: $u_0 = 1, u_1 = 0, u_2 = 3$ et $u_{m+3} = 2u_{m+2} - u_{m+1} + e^{u_m}$.

Définition: On dit que $(u_m)_{m \geq p}$ est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_p ($p \in \mathbb{N}$) si $(u_m)_{m \geq p}$ est définie par: la donnée de u_p et, pour tout $m \geq p$, $u_{m+1} = u_m + r$.

Proposition: Si $(u_m)_{m \geq p}$ est arithmétique de raison r et de premier terme u_p alors on a la formule explicite:

$$\forall m \geq p \quad u_m = u_p + r(m-p)$$

Preuve: Par récurrence sur $m \geq p$.

Définition: On dit que $(u_m)_{m \geq p}$ est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_p ($p \in \mathbb{N}$) si $(u_m)_{m \geq p}$ est définie par: la donnée de u_p et, pour tout $m \geq p$, $u_{m+1} = q \cdot u_m$.

Proposition: Si $(u_m)_{m \geq p}$ est géométrique de raison q et de premier terme u_p alors on a la formule explicite:

$$\forall m \geq p \quad u_m = u_p \cdot q^{m-p}.$$

Preuve: Par récurrence sur $m \geq p$.

exemple: Si je dépose un capital de $u_0 \in$ à la banque en année 0, et que le taux annuel est de 2%, alors j'aurais que, mon capital en année n étant noté u_n vérifie la relation de récurrence:

$$\forall n \geq 0 \quad u_{n+1} = u_n \times 1,02$$

Donc on a la formule explicite: $u_n = u_0 \times 1,02^n$.

Définition: On dit que $(u_n)_{n \geq 0}$ est arithmético-géométrique si: il existe deux réels a et b tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = a u_n + b$.

Remarque: Si $a = 1$, (u_n) est arithmétique; si $b = 0$, (u_n) est géométrique.

Méthode pour obtenir une formule explicite:

- On détermine le réel l vérifiant $l = a l + b$.
- On pose une autre suite: $v_n = u_n - l$ et on montre que (v_n) est géométrique de raison a en calculant v_{n+1} .
- On détermine alors la formule explicite de v_n , puis celle de $u_n = v_n + l$.

exemple: $u_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = 2u_n - 1$.

Méthode Python pour calculer un terme d'une suite récurrente:

Si, par exemple, $u_0 = 3$ et, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = u_n^2 - 1$, on peut calculer u_m en Python où m est demandé par l'utilisateur:

```
m = int(input('entrer un entier naturel m'))
```

```
u = 3
```

```
for k in range(0, m):
```

$$u = u^{**} 2 - 1$$

print(u)

Définition: On dit que $(u_m)_{m \geq 0}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 (SL2) si:

$$\exists (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* / \forall m \geq 0 \quad u_{m+2} = a u_{m+1} + b u_m.$$

Dans ce cas on appelle polynôme caractéristique de (u_m) , le polynôme $P(x) = x^2 - ax - b$.

Proposition: Si $(u_m)_{m \geq 0}$ est une SL2 de polynôme caractéristique $P(x) = x^2 - ax - b$, dont le discriminant est noté Δ .

- Si $\Delta > 0$: $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2 / \forall m \geq 0 \quad u_m = \alpha x_1^m + \beta x_2^m$
où x_1 et x_2 sont les racines de P .
- Si $\Delta = 0$: $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2 / \forall m \geq 0 \quad u_m = \alpha x_0^m + \beta m x_0^m$
où x_0 est l'unique racine de P .

exemple: Soit: $u_0 = 1$, $u_1 = 3$ et: $\forall m \geq 0 \quad u_{m+2} = 4 u_{m+1} - 4 u_m$.

Le polynôme caractéristique $x^2 - 4x + 4$ possède 1 seule racine: 2.

On a donc l'existence de deux réels α et β tel que, pour tout $m \geq 0$: $u_m = \alpha 2^m + \beta m 2^m$.

$$\text{Comme } u_0 = 1 \text{ et } u_1 = 3, \text{ on a: } \begin{cases} 1 = \alpha 2^0 + \beta \cdot 0 \cdot 2^0 \\ 3 = \alpha 2^1 + \beta \cdot 1 \cdot 2^1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \alpha \\ 3 = 2\alpha + 2\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ainsi, on a la formule explicite: $u_m = 2^m + \frac{1}{2} m 2^m$ (Passe à vérifier de tête si elle fonctionne bien pour u_0 ou u_1 !)

Méthodes pour les suites non usuelles dont on veut une formule explicite:

Pour une suite récurrente ne rentrant pas dans le cours,
par exemple : $u_0 = 2$ et $u_{m+1} = u_m^3$.

Idee 1: On peut essayer de trouver une formule explicite en tâtonnant:

- On calcule quelques termes, ici; $u_1 = 2^3$, $u_2 = 2^9$, $u_3 = 2^{27}$.
- On conjecture une formule, ici; $u_m = 2^{3^m}$.
- On démontre la conjecture par récurrence.

Cela peut être très difficile de conjecturer la bonne formule!

Idee 2: On peut appliquer une fonction à u_m et étudier une nouvelle suite $v_m = f(u_m)$ qui sera plus simple.

- Dans l'exemple ci-dessus, si on pose $v_m = \ln(u_m)$,
on remarque que $v_{m+1} = \ln(u_{m+1}) = \ln(u_m^3) = 3 \ln(u_m) = 3v_m$
donc (v_m) est géométrique donc: $v_m = v_0 \cdot 3^m = \ln 2 \cdot 3^m$
donc $u_m = e^{v_m} = e^{\ln 2 \cdot 3^m} = 2^{3^m}$.

Idee 3: On peut faire un télescopage si l'écart se présente:

- Si $u_0 = 0$ et $u_{m+1} = u_m + m + 2$

comme $u_{h+1} - u_h = h + 2$, en sommant de $h=0$ à $m-1$:

$$\sum_{h=0}^{m-1} u_{h+1} - u_h = \sum_{h=0}^{m-1} h + 2, \text{ on obtient}$$

par télescopage:

$$u_m - u_0 = \frac{(m-1)m}{2} + 2m$$

donc
$$u_m = \frac{m^2 + 3m}{2}.$$