TD : Suites récurrentes

1. Déterminer une formule explicite des suites suivantes :
   (a) $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbf{N}* : u_{n+1} = u_n - 2$
   (b) $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbf{N} : u_{n+1} = \sqrt{2}u_n$
   (c) $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbf{N} : u_{n+1} = 2u_n + 1$
   (d) $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbf{N} : u_{n+1} = \sqrt{u_n}$
   (e) $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbf{N} : u_{n+1} = 2u_n^{\frac{1}{3}}$ (On pourra poser la suite $v_n = ln(u_n)$).
   (f) $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbf{N} : u_{n+1} = nu_n$
   (g) $u_0 = 2, u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbf{N} : u_{n+2} = 2u_{n+1} + 15u_n$
   (h) $u_0 = -1, u_1 = -1$ et $\forall n \in \mathbf{N} : u_{n+2} = u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n$

2. Déterminer le sens de variations (éventuellement apcr) des suites suivantes :
   (a) $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbf{N} : u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1}$.
   (b) $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbf{N} : u_{n+1} = u_n + n^2 - 10n$.
   (c) $\forall n \in \mathbf{N} : u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{u_n}$.
   (d) $\forall n \in \mathbf{N} : u_n = (\frac{6}{\sqrt{37}})^n$.
   (e) $\forall n \in \mathbf{N} : u_n = \frac{2n-3}{n+2}$.
   (f) $\forall n \in \mathbf{N} : u_n = n^2 - n - 1$.

3. On considère les suites arithmétiques suivantes :
   (a) $u_0 = 2$ et $u_{10} = 27$.
   (b) $v_2 = 10$ et $v_4 = 25$.

   Donner une formule explicite pour u_n et v_n.

4. On considère les suites géométriques suivantes :
   (a) $u_0 = 1$ et $u_3 = 10^{12}$
   (b) $v_3 = 9$ et $v_6 = 20$

   Donner une formule explicite pour u_n et v_n.

5. Soit la suite : $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbf{N} : u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$.
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbf{N} : u_n < 6$.
   (b) Montrer que (u_n) est strictement croissante.
   (c) En étudiant $v_n = u_n - 6$, déterminer une formule explicite de (u_n).

6. Déterminer une formule explicite de la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbf{N} : u_{n+1} = pu_n + (1-p)$ en fonction de n, p et u_0.
   Calculer $\sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de n, p et u_0.

7. Soit $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbf{N} : u_{n+1} = \frac{1+2u_n}{2+u_n}$.
   Montrer que $\forall n \geqslant 1 : 0 < u_n \leqslant 1$.

8. Soit $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbf{N} : u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$
   Montrer que (u_n) est bien définie et croissante.

9. (a) Soit $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbf{N} : u_{n+1} = u_n + 2n + 5$.
   Montrer que $\forall n \in \mathbf{N} : u_n = n^2 + 4n + 2$.

   (b) Soit $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbf{N} : u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2$.
   Montrer que $\forall n \in \mathbf{N} : u_n = \frac{25}{4} \times \frac{1}{3^n} + \frac{3n}{2} - \frac{21}{4}$.

10. Soit $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbf{N} : u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n}$.
    Conjecturer une formule explicite de (u_n) et le démontrer par récurrence.

11. Soit $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbf{N} : u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
    (a) Montrer que $\forall n \geqslant 0 : u_n \geqslant n - 1$.
    (b) Montrer que $\forall n \geqslant 0 : u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n]$.

12. Soient (a_n) et (b_n) définies par $\begin{cases} a_0 = 2 \\ b_0 = 2 \end{cases}$ et

    $\forall n \in \mathbf{N} : \begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{5}(3a_n + 2b_n) \\ b_{n+1} = \frac{1}{5}(2a_n + 3b_n) \end{cases}$
    (a) Calculer une formule explicite de $u_n = a_n + b_n$.
    (b) Calculer une formule explicite de $v_n = a_n - b_n$.
    (c) En déduire les termes généraux de (a_n) et (b_n).
    (d) Calculer $\sum_{k=0}^{n} a_k$.