TD : Matrices

1. Déterminer si ces matrices sont inversibles, le cas échéant, donner leur inverse.

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (g) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (h) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(i) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (j) $\begin{pmatrix} 16 & 17 & -4 & 0 \\ 0 & 26 & -12 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 36 \end{pmatrix}$ (k) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. Écrire sous forme de tableaux de nombres les matrices suivantes :
$A = (i+j)_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3\\ 1\leqslant j\leqslant 3}}$ $\quad B = (i^j)_{\substack{1\leqslant i\leqslant 4\\ 1\leqslant j\leqslant 2}}$ $\quad C = (1)_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3\\ 1\leqslant j\leqslant 3}}$
$D = (d_{i,j})_{1\leq i,j\leq 4}$ où $d_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

3. On pose la matrice $J_3 = (1)_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3\\ 1\leqslant j\leqslant 3}}$. Calculer J_3^2. Montrer par récurrence que :
$\forall k \in \mathbf{N}^* : J_3^k = 3^{k-1} J_3$.
Cette formule est-elle encore valable pour $k = 0$?

4. On pose $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer N^k pour tout $k \in \mathbf{N}$.

5. On pose $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -5 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

   (a) Calculer P^2, Q^2, PQ et QP.
   (b) Déterminer deux réels α et β tels que : $A = \alpha P + \beta Q$.
   (c) En déduire l'expression de A^n, où $n \in \mathbf{N}^*$.

6. On pose $A = \begin{pmatrix} 7 & -10 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

   (a) Déterminer P^{-1}.
   (b) Calculer $D = P^{-1}AP$, puis D^n pour $n \in \mathbf{N}$.
   (c) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$: $A^n = PD^nP^{-1}$. En déduire l'expression de A^n

7. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

   (a) Déterminer les vecteurs $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ qui vérifient $AX = 0$
   (b) Déterminer les vecteurs $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ qui vérifient $AX = 4X$
   (c) En déduire les solutions des systèmes linéaires suivants :

   (i) $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 4y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$ $\qquad$ (ii) $\begin{cases} x + 2y + z = 4x \\ 4y = 4y \\ 2x + 2z = 4z \end{cases}$

8. On définit deux suites (a_n) et (b_n) :

$$a_0 = 1, b_0 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbf{N} : \begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n \\ b_{n+1} = b_n \end{cases}$$

On pose également $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$

   (a) Déterminer $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ telle que $X_{n+1} = AX_n$.
   (b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N} : X_n = A^n X_0$.
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N} : A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, en déduire l'expression de a_n et de b_n.

9. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})^2$. Montrer que : $det(AB) = det(A)det(B)$.

10. On définit, pour tout $x \in \mathbf{R}$: $A(x) = \begin{pmatrix} x-1 & 1 \\ 4 & 2x+3 \end{pmatrix}$ Pour quelles valeurs de x, $A(x)$ est-elle inversible ?

11. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où $(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4$.
Vérifier que $A^2 - (a+d)A + det(A)I_2 = 0$.

12. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
   (a) Déterminer les matrices $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ vérifiant $MN = NM$.
   (b) Déterminer les matrices $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ vérifiant $MA = AM$.

13. Soient $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix}$,où $(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4$, deux matrices de $\mathcal{M}_{1,4}(\mathbf{R})$.
   (a) Calculer $M = {}^tUV$ et $N = U{}^tV$.
   (b) Montrer que $M^2 = (a+b+c+d)M$.
   (c) Montrer par l'absurde que M n'est pas inversible.

14. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $A^n = 0$ et $A^{n-1} \neq 0$.
   (a) Calculer $(A - I_n) \sum_{k=0}^{n-1} A^k$.
   (b) En déduire que $A - I_n$ est inversible.