TD : Limites de suites

1. Déterminer les limites des suites suivantes :
   (a) $u_n = n^2 e^{-n}$.
   (b) $u_n = n^3 e^{-n+7}$.
   (c) $u_n = (n^2 + n + \frac{1}{n})e^{-n-1}$.
   (d) $u_n = n^{-4} ln(n)$.
   (e) $u_n = n^{-2} ln(n^8)$.
   (f) $u_n = \frac{n^{\frac{1}{4}}}{ln(n^2)}$.
   (g) $u_n = ln(n)e^{-n}$.
   (h) $u_n = ne^{-ln(n)}$.

2. Calcules les limites de ces suites à l'aide d'un encadrement :
   (a) $u_n = \lfloor n \rfloor e^{-n}$.
   (b) $u_n = \frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{n}$.
   (c) $u_n = \lfloor \frac{1}{n} \rfloor e^{n^2}$.
   (d) $u_n = \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{ln(n)}$.

3. Calculer les limites suivantes en utilisant la forme exponentielle pour (a) ou (b). *On rappelle que si $a > 0$ et b un réel, $a^b = e^{b \ln a}$*
   (a) $\lim\limits_{n \to +\infty} (2 + \frac{1}{n})^n$.
   (b) $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 + n^2)^{\frac{1}{n}}$.
   (c) $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n^2+2} - n$.
   (d) $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{4^n - 3^n}{4^n + 3^n}$.

4. Etudier les limites suivantes quand $n \to +\infty$:
   (a) $3^n e^{-3n}$.
   (b) $\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}$.
   (c) $\frac{(-1)^n + 2n}{5n + (-1)^n}$.
   (d) $ln(2n^2 - n) - ln(3n+1)$.
   (e) $\frac{ln(n+e^n)}{n}$.
   (f) $\frac{ln(1+\sqrt{n})}{ln(1+n)}$.

5. Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \geqslant 0 : u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} \end{cases}$
   (a) Montrer que $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est bien définie et que pour tout $n \geqslant 0 : u_n > 0$.
   (b) Montrer que $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est croissante.
   (c) Calculer $u_{n+1}^2 - u_n^2$ en fonction de u_n^2.
   (d) Montrer que $\forall n \geqslant 1 : u_{n+1}^2 = 2n + 3 + \sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k^2}$.
   (e) En déduire que $\forall n \geqslant 0 : u_{n+1} \geqslant \sqrt{2n+3}$ et en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

6. On pose pour tout $n \in \mathbf{N}$: $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.
   (a) Montrer que : $\forall k \geqslant 2 : \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.
   (b) En déduire que : $\forall n \geqslant 1 : S_n \leqslant 2$.
   (c) Montrer que $(S_n)_{n \geqslant 1}$ converge.

7. Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbf{N} : u_{n+1} = \sqrt{u_n + 12} \end{cases}$.
   (a) Montrer que pour tout $n \geqslant 0 : 0 \leqslant u_n \leqslant 4$.
   (b) Montrer que $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est croissante. En déduire que $(u_n)_{n \geqslant 0}$ converge. Déterminer sa limite.

8. Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbf{N} : u_{n+1} = u_n^2 \end{cases}$
   (a) Montrer que $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est croissante
   (b) Montrer par l'absurde que $(u_n)_{n \geqslant 0}$ diverge vers $+\infty$.

9. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1}$. Montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont ajdacentes. En déduire que (u_n) est convergente.

10. * Soient (u_n) et (v_n) les deux suites définies pour $n \geq 1$ par :
$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}, v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$$
    Montrer que ces deux suites sont ajdacentes.

11. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) données ci-dessous forment des couples de suites adjacentes.
    (a) $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$
    (b) $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n}$ et $v_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$.

12. On définit la suite (u_n) par : $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbf{N} : u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1} u_n} \end{cases}$.
    (a) Vérifier que la suite est bien définie et strictement positive.
    (b) Donner une formule explicite de (u_n). (Indication : Poser $v_n = \ln(u_n)$)

13. Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbf{N}^* : u_{n+1} = (\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2})u_n \end{cases}$.
    (a) A l'aide d'un produit télescopique, calculer : pour tout $N \geqslant 1 : u_N$ en fonction de N.
    (b) Montrer par récurrence (sans utiliser la (a)) que : $\forall n \in \mathbf{N}^* : u_n = \frac{n}{(n-1)!}$.

14. Montrer que :
$\forall k \geqslant 2 : \frac{1}{(k-1)(k+2)} = \frac{1}{3}(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+2})$
Simplifier $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)(k+2)}$ Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$?

15. Soit $\forall n \geqslant 1 : u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+n^2}$.
   (a) Montrer que :
   $$\forall k \in [\![1,n]\!] : \frac{k}{n+n^2} \leqslant \frac{k}{k+n^2} \leqslant \frac{k}{1+n^2}$$
   (b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

16. * Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que :
$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ v_0 > 0 \end{cases}$$
et $\forall n \in \mathbf{N} : \begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \\ v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} \end{cases}$.
   (a) Montrer $\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2 : 2xy \leqslant x^2 + y^2$.
   En déduire que : $\forall n \geqslant 1 : u_n \leqslant v_n$.
   (b) En déduire que $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.
   (c) Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante.
   (d) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \in \mathbf{R}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l' \in \mathbf{R}$.
   (e) Montrer que $l = l'$.

17. Soit $\forall n \geqslant 1 : S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
   (a) * Montrer que $S_{2n} - Sn \geqslant \frac{1}{2}$.
   (b) Vérifier que $(S_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et donner, en raisonnant par l'absurde, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.
   (c) Interpréter ce résultat et le mettre en regard de l'exercice 6.

18. Soit $\forall x \in \mathbf{R} : f(x) = e^x - 1$, et $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $\begin{cases} u_0 \in \mathbf{R} \\ \forall n \in \mathbf{N} : u_{n+1} = e^{u_n} - 1 \end{cases}$
   (a) Montrer que $f(x) = x$ a une unique solution en $x = 0$.
   (b) Étudier le signe de $f(x) - x$ et le sens de variation de f.
   (c) Montrer que, si $u_0 = 1$ alors, $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.
   En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
   (d) Montrer que, si $u_0 \in \mathbf{R}_-^*$, alors $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante et $\forall n \in \mathbf{N} : u_n < 0$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

19. * Soit $n \geqslant 1$. Pour tout réel x on définit :$f_n(x) = x^n + x - 1$.
   (a) Montrer que $\forall n \geqslant 1 : f_n(x) = 0$ a une unique solution $x_n \in]0,1[$.
   (b) Montrer que $f_{n+1}(x_n) < f_{n+1}(x_{n+1})$.
   (c) En déduire que $x_n < x_{n+1}$.
   (d) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = l \in [0,1]$.
   (e) En raisonnant par l'absurde, montrer que $l = 1$.

20. Soit $n \geqslant 1$. Pour tout réel x on définit :$f_n(x) = \frac{1}{1+e^x} + nx$
   (a) Calculer f_n' et f_n''. En déduire les variations de f_n.
   (b) Montrer que pour tout $n \geqslant 1 : f_n(x) = 0$ a une unique solution sur $\mathbf{R}$ notée u_n.
   (c) Montrer que pour tout $n \geqslant 1 : \frac{-1}{n} \leqslant u_n \leqslant 0$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
   (d) Montrer $\lim\limits_{n\to+\infty} -2nu_n = 1$. (Utiliser $f_n(x)$)

21. Soit $n \geqslant 1$. Pour tout réel x on définit : $\mathrm{f}_n(x) = x^n + 9x^2 - 4$.
   (a) Montrer que pour tout $n \geqslant 1 : f_n(x) = 0$ a une unique solution dans $]0,+\infty[$ notée u_n.
   (b) Que valent u_1 et u_2 ?
   (c) Montrer que pour tout $n \geqslant 1 : u_n \in \left]0, \frac{2}{3}\right[$.
   (d) Montrer que pour tout $n \geqslant 1 : \forall x \in]0,1[: f_{n+1}(x) < f_n(x)$.
   (e) En déduire les variations de $(u_n)_{n\geqslant 1}$.
   (f) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \in \mathbf{R}$.
   (g) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n)^n$. En déduire la valeur de l.

22. Soit n un entier, $n \geq 3$. On note (E_n) l'équation : $x - ln(x) - n = 0$.
   (a) Montrer que (E_n) a une unique solution dans $]0,1[$, notée x_n.
   (b) Que valent $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n}$?