

# Matrices

## 1 - Définitions et opérations

Définition: Une matrice a  $m$  lignes et  $p$  colonnes ( $m, p \in \mathbb{N}^*$ ) et est un tableau de nombres réels. Soit  $A$  une telle matrice, on la note  $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq p}}$  où  $a_{ij}$  est le coefficient situé ligne  $i$ , colonne  $j$ .

On note  $M_{m,p}(\mathbb{R})$  l'ensemble de ces matrices.

Par exemple, si  $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 2 \\ 1 \leq j \leq 3}}$ ,  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ .

Vocabulaire : . Si  $m=1$ , on parle de matrices lignes :  $M_{1,p}(\mathbb{R})$

. Si  $p=1$ , on parle de matrices colonnes :  $M_{m,1}(\mathbb{R})$ .

. Si  $m=p$ , on parle de matrices carrées :  $M_{m,m}(\mathbb{R})$  qu'on note  $M_m(\mathbb{R})$

. La diagonale d'une matrice correspond aux coefficients situés ligne  $i$  et colonne  $i$  (où  $i \in \mathbb{N}^*$ )

. Une matrice diagonale est une matrice dont tous les coefficients en dehors de la diagonale sont égaux à 0 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ est diagonale, } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ne l'est pas.}$$

. Une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) est une matrice dont tous les coefficients sous (resp. au dessus) de la diagonale sont nuls. L'ensemble s'écrit  $T_m^+(\mathbb{R})$  (resp.  $T_m^-(\mathbb{R})$ ).

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in T_2^+(\mathbb{R}) ; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \in T_m^-(\mathbb{R}).$$

- On appelle matrice nulle la matrice dont les coefficients sont tous nuls. On la note  $O_{m,p}$  ou encore  $O$ .  
 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  est la matrice carrée nulle à 2 lignes et 2 colonnes.

- On appelle matrice identité (de taille ou format  $m$ ), la matrice carrée diagonale dont les coefficients diagonaux valent tous 1. On la note  $I_m$  ou  $I$  s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la taille.  
 $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$

Définition: Soient  $A, B \in M_{m,p}(\mathbb{R})$  deux matrices de même format. On définit :

- La somme  $A+B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq p}}.$

- Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on définit une multiplication externe :

$$\lambda \cdot A = (\lambda a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq p}}.$$

exemple: Si  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,

$$A + 3B = \begin{pmatrix} 1+3 \times 1 & 2+3 \times 1 \\ 0+3 \times 1 & 1+3 \times 1 \\ 1+3 \times 0 & 3+3 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

- Les propriétés de ces opérations sont les mêmes que celles sur des nombres réels :  $A+B = B+A$  ;  $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$  ;  $\lambda(\mu A) = \lambda \mu A$  etc.

Définition: Soient  $A \in M_{m,p}(\mathbb{R})$  et  $B \in M_{p,q}(\mathbb{R})$ .

On définit le produit matriciel de  $A$  par  $B$  :

$$A \cdot B = C \in M_{m,q}(\mathbb{R}) \text{ où } C = (c_{ij}) = \left( \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} \right)$$

exemple: Si  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3,2}(\mathbb{R})$  et  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 2 + 2 \times 0 & 1 \times 1 + 2 \times (-1) \\ 0 \times 2 + 1 \times 0 & 0 \times 1 + 1 \times (-1) \\ 1 \times 2 + 0 \times 0 & 1 \times 1 + 0 \times (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque: Ce "produit" n'est pas commutatif en général,  $AB$  n'est pas toujours égal à  $BA$  ( $BA$  n'est pas toujours possible car les formats ne sont pas nécessairement compatibles)

exemple: Si  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 \times (-2) + 3 \times 4 \\ 4 \times (-2) + (-1) \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -12 \end{pmatrix} \text{ et } BA \text{ n'est même pas possible.}$$

On a ce moyen mnémotechnique:

$$M_{m,p}(\mathbb{R}) \times M_{p,q}(\mathbb{R}) = M_{m,q}(\mathbb{R})$$

• Les manipulations algébriques de ce produit sont les mêmes que celles sur les nombres sous la commutativité :

- $A(B+C) = AB + AC$
- $ABC = (AB)C = A(BC)$
- $A(\lambda B) = \lambda AB \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

Vocabulaire: Soient  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ . Lorsque  $AB = BA$ , on dit

que  $A$  et  $B$  commutent.

Définition / Propriété: On appelle matrice scalaire, toute matrice de la forme  $\lambda I_m$  où  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

$$\bullet \forall A \in M_m(\mathbb{R}), \forall \lambda \in \mathbb{R}, A \cdot \lambda I_m = \lambda I_m A = \lambda A.$$

Autrement dit les matrices scalaires commutent avec toutes les matrices.

exemple:  $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = -3 I_2$  est scalaire mais pas  $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Les matrices scalaires sont diagonales, qui sont elle même triangulaires.

Définition: Soit  $A \in M_{m,p}(\mathbb{R})$ . On définit la transposée de  $A$ , notée  ${}^t A \in M_{p,m}(\mathbb{R})$ , obtenue en échangeant les lignes de  $A$  avec ses colonnes.

Formellement, si  $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq p}}$ ,  ${}^t A = (a_{ji})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq m}}$ .

ex:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$  et  ${}^t A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ .

Propriété:  $\forall (A, B) \in M_{m,p}(\mathbb{R})^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

- ${}^t(A + \lambda B) = {}^t A + \lambda {}^t B$  : linéarité de la transposée
- ${}^t({}^t A) = A$
- ${}^t(AB) = {}^t B {}^t A$

Définition: On dit que  $A$  est symétrique si:  ${}^t A = A$ .

On note l'ensemble de ces matrices:  $S_m(\mathbb{R})$ .

Proposition:  $\forall (A, B) \in S_m(\mathbb{R})^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, A + \lambda B \in S_m(\mathbb{R})$

On dit que  $S_m(\mathbb{R})$  est stable par combinaison linéaire

Preuve: On utilise la linéarité de la transposée.

exemples:  $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R})$ . Les matrices diagonales sont symétriques.

Définition: Pour  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $A \in M_m(\mathbb{R})$ , on définit:

- $A^p = A \cdot A \dots A$  où  $A$  apparaît  $p$  fois.
- Par convention  $A^0 = I_m$ .

exemple: Si  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

En général il est difficile de calculer  $A^p$ .

Proposition: Soit  $D$  une matrice diagonale:  $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{pmatrix}$

dans ce cas, pour  $p \in \mathbb{N}$ ,  $D^p = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m^p \end{pmatrix}$ .

exemple: Si  $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $D^p = \begin{pmatrix} 2^p & 0 \\ 0 & 1^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

⚠ le résultat fonctionne sur une matrice diagonale!

## 2 - Les matrices inversibles.

Rappel: Soit  $x \in \mathbb{R}$ , on appelle inverse de  $x$  tout  $y \in \mathbb{R}$  vérifiant:

$$xy = 1.$$

Ce réel, lorsqu'il existe, est unique, et on le note  $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$ .

Définition: Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Si, il existe  $B \in M_n(\mathbb{R})$ , telle que:

$$AB = I_n \text{ et } BA = I_n$$

alors on dit que  $A$  est inversible et on appelle  $B = A^{-1}$  son inverse.

Remarque: Lorsqu'une matrice  $B$  existe, ce qui n'est pas toujours le cas, il n'y en a qu'une seule. On note  $A^{-1}$  et pas  $\frac{1}{A}$ .

Proposition: Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Si, il existe  $B \in M_n(\mathbb{R})$ , telle que:

$$AB = I_n \text{ ou } BA = I_n$$

alors  $A$  est inversible et  $A^{-1} = B$ .

Remarque: On se sert de cette proposition en pratique, pas de la définition.

exemples: Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , un calcul donne  
 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ , donc  
 $A$  est inversible et  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

$A^{-1}$  est donc la matrice par laquelle on multiplie  $A$  pour avoir  $I_n$ .

Proposition:  $\forall \lambda \neq 0$ ,  $\lambda I_m$  est inversible et  $(\lambda I_m)^{-1} = \frac{1}{\lambda} I_m$ .

Preuve:  $(\lambda I_m) \cdot \left(\frac{1}{\lambda} I_m\right) = \lambda \times \frac{1}{\lambda} I_m \cdot I_m = I_m$ .

Proposition: Soient  $A, B \in M_m(\mathbb{R})$  deux matrices inversibles.  
 $AB$  est inversible et  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

Preuve: Comme  $A$  et  $B$  sont inversibles, on peut écrire  $A^{-1}$  et  $B^{-1}$ ,  
et  $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = A I_m A^{-1} = AA^{-1} = I_m$ . donc  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

Méthode: Si on dispose d'une égalité du type:

$$A^3 - 2A + 3I_m = 0. \text{ On a alors:}$$

$$A^3 - 2A = -3I_m$$

$$\text{donc } -\frac{1}{3}(A^3 - 2A) = I_m$$

$$\text{donc } A \left(-\frac{1}{3}(A - 2I_m)\right) = I_m$$

$$\text{donc } A \text{ est inversible et } A^{-1} = -\frac{1}{3}(A - 2I_m).$$

exemple: Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ ,  $A^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ , c'est-à-dire:

$$A^2 = \frac{1}{4} I_2 \quad \text{donc } 4A^2 = I_2, \text{ donc}$$

$$A \times 4A = I_2$$

$$\text{donc } A \text{ est inversible et } A^{-1} = 4A.$$

Écriture matricielle des systèmes linéaires:

Soit (S) un système linéaire à m équations et p inconnues:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mp}x_p = b_m \end{cases}$$

(S) se réécrit  $AX = Y$  où :  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$  ;  $Y = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

et  $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq p}} \in M_{m,p}(\mathbb{R})$ .

exemple:  $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$  s'écrit  $AX = Y$   
où  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ,  $Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$   
et  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ .

Proposition: Soit  $A \in M_m(\mathbb{R})$ . A est inversible si et seulement si pour tout  $Y \in M_{m,1}(\mathbb{R})$ , l'équation  $AX = Y$  a une unique solution  $X \in M_{m,1}(\mathbb{R})$

Preuve:  $\Rightarrow$  Si A est inversible alors  $A^{-1}$  existe, donc on résout:

$$AX = Y \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}Y \Leftrightarrow X = A^{-1}Y.$$

donc il y a bien une unique solution en  $X = A^{-1}Y$ .

Remarque: Lorsqu'on multiplie une équation de matrices par une matrice inversible, on a une équivalence (car il est possible de faire le chemin inverse).

Le n'est pas le cas quand on multiplie par une matrice non inversible.

Méthode: Pour savoir si  $A^{-1}$  existe, on résout donc  $AX = Y$ .

exemple 1:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ . On résout donc:

$$AX = Y \text{ où } Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \text{ d'inconnue } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} :$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + z = a \\ x + y + 2z = b \\ 3x + y + 2z = c \end{cases} \quad \begin{array}{l} (\text{on a mis sous forme de système} \\ \text{l'équation } AX = Y) \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + z = a \\ y + z = b - a \\ y - z = c - 3a \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array} \quad (\text{On fait un pivot!})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + z = a \\ y + z = b - a \\ -2z = c - 3a - (b - a) \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \quad \swarrow \text{on remonte}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a - z = 0 \cdot a - \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c \\ y = b - a - z = -2a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c \\ z = 1a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c \end{cases}$$

Ainsi ce système a une unique solution et on obtient :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

exemple 2: Soit  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ . On résoud  $BX = Y$

où  $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  et  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = a \\ 2x + 2y = b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = a \\ 0 = b - 2a \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

Ici, le système ne possède pas une unique solution (si  $b-2a \neq 0$ , il est incompatible), donc  $B$  n'est pas inversible ( $B^{-1}$  n'existe pas!).

Proposition: Soit  $A$  une matrice triangulaire (inférieure ou supérieure) de  $M_n(\mathbb{R})$ .

$A$  est inversible si et seulement si elle possède pas de zéro sur sa diagonale.

Preuve: Quand on met  $AX=V$  sous forme de système avec  $A$  triangulaire, le système est directement triangulaire. On a un système de  $n$  équations si et seulement si chacun des coefficients diagonaux est non nul.

Remarque: En revanche, on n'a pas de formule toute faite pour l'inverse d'une telle matrice : il faut la calculer.

Propriété: Soit  $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$  une matrice diagonale de  $M_n(\mathbb{R})$  avec des réels  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .

$D$  est inversible si tous les  $\lambda_i$  sont non nuls.

Dans ce cas  $D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}$ .

Remarque: Cela signifie que la formule de  $D^p$  marche aussi pour  $p \in \mathbb{Z}$  (longue  $D$  est inversible).

exemple: Si  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ ,  $D$  est inversible et  $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ .

Proposition: Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ .

$A$  est inversible si et seulement si  $ad - b \neq 0$

Si c'est le cas, on a :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Preuve:  $\Leftarrow$  Supposons  $ad - bc \neq 0$ , on calcule alors :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} ad-bc & ab-ba \\ cd-dc & -bc+ad \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \text{ donc } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ est inversible et } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$  Par contre posée, supposons  $ad - bc = 0$ , c-à-d  $ad = bc$ .

Si  $a, b, c$ , ou  $d = 0$ , les 4 sont nuls donc  $A = O_2$ , donc  $A$  n'est pas inversible.

Si  $a, b, c$  et  $d$  sont non nuls. On étudie l'équation  $AX = V$

$$\text{où } X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax + by = u \\ cx + dy = v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax + by = u \\ \underbrace{(bc-ad)}_{\neq 0} x + \underbrace{(bd-bd)}_{=0} y = bv - du \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax + by = u \\ 0 = bv - du \end{cases} \quad \text{le système n'a pas une unique solution} \\ \text{donc } A \text{ n'est pas inversible.}$$

## Quelques remarques de calcul utiles :

- $\forall A \in M_m(\mathbb{R}) \quad A \cdot I_m = I_m A = A \quad ; \quad O_m \cdot A = A \cdot O_m = O_m$
- $\forall p \in \mathbb{Z}, \quad I_m^p = I_m$ .
- $\alpha A^2 + \beta A = A(\alpha A + \beta I_m)$  (et non pas  $(\alpha A + \beta)$ ).
- $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$  (car, en général,  $AB \neq BA$ ).
- Il peut être utile de factoriser les coefficients d'une matrice :  
si  $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$ , on écrit  $B = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ .  
alors on a  $B^m = 2^m \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}^m$ .
- $(AB)^m = AB \cdot AB \cdot \dots \cdot AB$  (car, en général  $AB \neq BA$ )  
et non pas  $A^m B^m$ .
- Si on veut "faire disparaître"  $A$  dans une équation,  
par exemple  $AB = C$ , on multiplie par  $A^{-1}$  (si  $A$  est inversible) :  
 $B = A^{-1}C$ , on ne "divise" pas par  $A$  !
- Si  $A$  est inversible,  $\alpha A$  aussi (pour  $\alpha \neq 0$ ) et  $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$ .