Corrigé du Test du 16/10

1 – (a) $u_0 = 3$, $\forall n \geq 0 \quad u_{n+1} = 3u_n + 1$.

(u_n) est arithmético-géométrique. Cherchons : $\ell = 3\ell + 1 \iff \ell = -\frac{1}{2}$.

Posons : $\forall n \geq 0 \quad v_n = u_n + \frac{1}{2}$. On a : $v_{n+1} = 3u_n + 1 + \frac{1}{2} = 3(u_n + \frac{1}{2}) = 3v_n$

Ainsi (v_n) est géométrique de raison 3. D'où :

$\forall n \geq 0 \quad v_n = 3^n v_0 = \frac{7}{2} 3^n$. Ainsi $\boxed{u_n = \frac{7}{2} \cdot 3^n - \frac{1}{2}}$

(b) $u_0 = 2$, $u_1 = 3$, $\forall n \geq 0 \quad u_{n+2} = -2u_{n+1} + 8u_n$

(u_n) est une SRL2, de polynôme $x^2 + 2x - 8$ qui admet 2 et -4 comme racines.

Ainsi : $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \forall n \geq 0 \quad u_n = \alpha 2^n + \beta (-4)^n$.

En exploitant u_0 et u_1 on a : $\begin{cases} 2 = \alpha + \beta \\ 3 = 2\alpha - 4\beta \end{cases} \iff \begin{cases} 2 = \alpha + \beta \\ 11 = 6\alpha \quad L_2 + 4L_1 \end{cases}$

$\iff \alpha = \frac{11}{6}$ et $\beta = \frac{1}{6}$. D'où : $\boxed{u_n = \frac{1}{6}(11 \cdot 2^n + (-4)^n)}$

C – Méthode 1 : $u_{n+1} = u_n + n$ donc $u_{n+1} - u_n = n$

donc $\sum_{k=0}^{n} u_{k+1} - u_k = \sum_{k=0}^{n} k$

donc $u_{n+1} - u_0 = \frac{n(n+1)}{2}$

Donc : $u_{n+1} = \frac{n(n+1)}{2} + 1$. Donc $\boxed{u_n = \frac{(n-1)n}{2} + 1}$.

Méthode 2 : On prouve $P(n) =$ " $u_n = \frac{(n-1)n}{2} + 1$ " par récurrence sur $n \geq 0$.

I : $u_0 = 1$ et $\frac{(0-1) \cdot 0}{2} + 1 = 1$ donc $P(0)$ vraie.

H : Supposons $P(n)$ vraie pour un entier $n \geq 0$.

On a $u_{n+1} = u_n + n \underset{P(n)}{=} \frac{(n-1)n}{2} + 1 + n = \frac{(n-1)n + 2n}{2} + 1$

$$= \frac{n^2+n}{2} + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + 1$$

donc $P(n+1)$ est vraie, par principe de récurrence, on a bien : $\forall n \geq 0 \quad u_n = \frac{(n-1)n}{2} + 1$

2_ Résolvons les systèmes :

ⓐ

$$\begin{cases} 3x + y + z = 1 \\ x + 3y + z = 0 \\ x + y + 3z = 2 \end{cases} \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\iff} \begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ 3x + y + z = 1 \\ x + y + 3z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \\ L_2 - 3L_1 \\ L_3 - L_1 \end{array} \begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ -8y - 2z = 1 \\ -2y + 2z = 2 \end{cases} \iff \begin{array}{l} \\ \\ L_3 + L_2 \end{array} \begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ -8y - 2z = 1 \\ -10y = 3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -3y - z = \frac{9}{10} - \frac{7}{10} = \frac{1}{5} \\ z = \frac{-8y-1}{2} = -4y - \frac{1}{2} = \frac{12}{10} - \frac{1}{2} = \frac{7}{10}. \\ y = \frac{-3}{10} \end{cases}$$

$$\boxed{S = \left\{ \left(\frac{1}{5}, \frac{-3}{10}, \frac{7}{10} \right) \right\}.}$$

ⓑ

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ y - z = 1 \\ x + z = 1 \end{cases} \iff \begin{array}{l} \\ \\ L_3 - L_1 \end{array} \begin{cases} x - y = 2 \\ y - z = 1 \\ y + z = -1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{array}{l} \\ \\ L_3 + L_2 \end{array} \begin{cases} x - y = 2 \\ y - z = 1 \\ 2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ z = -1 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{S = \left\{ (2, 0, -1) \right\}.}$$