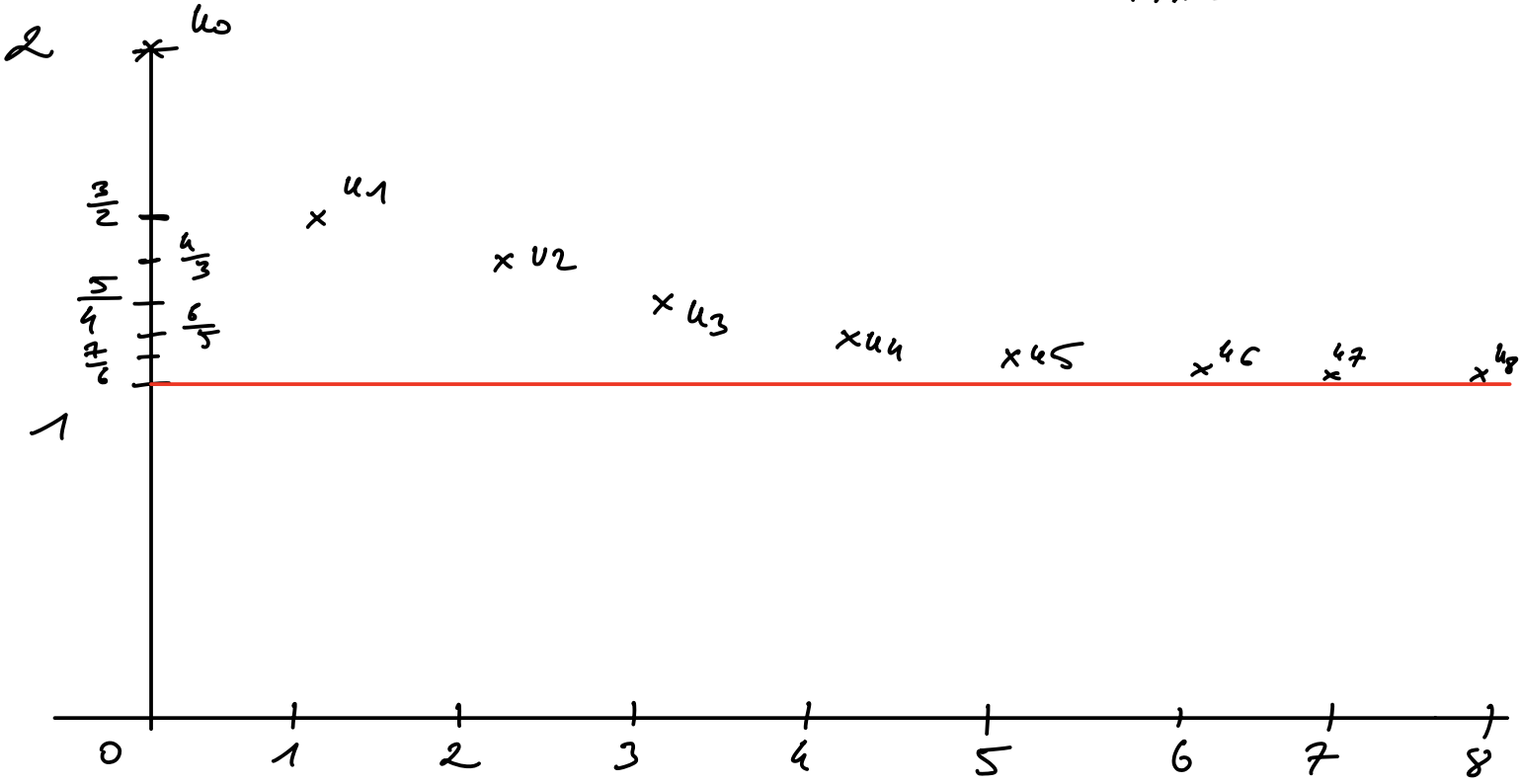
Suites et limites

• On peut représenter graphiquement les termes d'une suite $(v_n)_{n\geq 0}$, en plaçant les points de coordonnées (n, v_n).

Par exemple, si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 1 + \frac{1}{1+n}$, on obtient :



Dans cet exemple, il semble que les termes de la suite se rapprochent de la valeur 1.

Définition : Soit $(v_n)_{n\geq 0}$ une suite et l un réel.

On dit que $(v_n)_{n\geq 0}$ converge vers l (noté $\lim_{n\to+\infty} v_n = l$) si :

$\forall \varepsilon > 0$, $\underbrace{\exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N}$, $\underbrace{|u_n - \ell| \leq \varepsilon}$

cela veut dire à partir d'un certain rang N

correspond à la distance entre u_n et ℓ

En français, cela signifie que, quelle que soit la valeur de $\varepsilon > 0$ (vous entendu aussi "petite" que l'on veut) à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite sont proches de la limite ℓ à ε- près.

Vocabulaire : S'il existe un tel réel ℓ, on dit que $(u_n)_{n \geq 0}$ converge. Sinon on dit que $(u_n)_{n \geq 0}$ diverge.

Proposition : Si $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers un réel ℓ alors ce réel est unique.

Proposition : Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite.
$(u_n)_{n \geq 0}$ converge si et seulement les suites $(u_{2n})_{n \geq 0}$ et $(u_{2n+1})_{n \geq 0}$ convergent toutes deux vers un même réel.

exemple : $u_n = (-1)^n$.

Définition : On dit qu'une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ a pour limite $+\infty$ (noté $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$) si :

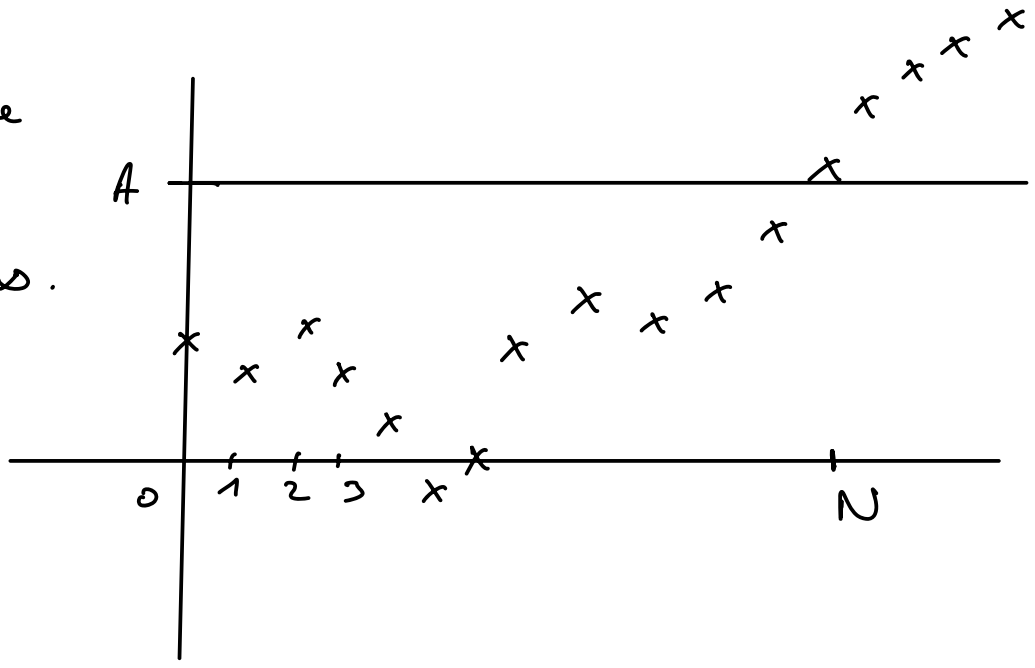
$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, \quad u_n \geq A$

En français, cela signifie que, quel que soit le nombre A que l'on choisit (sous entendu A et "grand"), à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite sont supérieurs à A.

On dit que une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ a pour limite $-\infty$ (noté $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$) si :

$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, \quad u_n \leq A$

exemple graphique d'une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ vérifiant $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.



Proposition (Limite des suites géométriques) :

Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = q^n$, avec $q \in \mathbb{R}$, on a :

- Si $q > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
- Si $-1 < q < 1$ $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

- Si $q \leq -1$, $(v_n)_{n\geq 0}$ n'a pas de limite.

Proposition : Soit $d \in \mathbb{N}^*$

- $\lim\limits_{n\to+\infty} n^d = +\infty$ - $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^d} = 0$

Proposition (Limites des polynômes) :

Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = a_d n^d + \dots + a_1 n + a_0$ où $d \in \mathbb{N}^*$ et $a_d, \dots, a_1, a_0$ sont des réels :

- Si $a_d > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$
- Si $a_d < 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$

exemples : $v_n = n^4 - 10n^3$; $r_n = -2n^8 + 12n^6 + 2$.

Proposition : Soient $(v_n)_{n\geq 0}$ et $(r_n)_{n\geq 0}$ des suites convergentes et α et β des réels, alors :

- $(\alpha v_n + \beta r_n)_{n\geq 0}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} (\alpha v_n + \beta r_n) = \alpha \lim\limits_{n\to+\infty} v_n + \beta \lim\limits_{n\to+\infty} r_n$.
- $(v_n r_n)_{n\geq 0}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n . r_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n \times \lim\limits_{n\to+\infty} r_n$

- Si, de plus, $(u_n)_{n\geq 0}$ ne s'annule pas et sa limite est non nulle, alors $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\geq 0}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n}$

<u>exemple</u> : $u_n = \frac{2}{n^2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$; $3_n = \left(1+\left(\frac{-1}{3}\right)^n\right) \times \frac{1}{n}$

$$x_n = \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)^{n+2} + 3}{2 + \frac{1}{n^3}} .$$

- Limite de $(\alpha u_n)_{n\geq 0}$:

α \ $\lim u_n$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
$\alpha > 0$	$\alpha\ell$	$+\infty$	$-\infty$
$\alpha < 0$	$\alpha\ell$	$-\infty$	$+\infty$
$\alpha = 0$	0	0	0

- Limite de $(u_n + v_n)_{n\geq 0}$

$\lim u_n$ \ $\lim v_n$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
ℓ'	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I.
$-\infty$	$-\infty$	F.I	$-\infty$

- Limite de $(u_n \cdot v_n)_{n \geq 0}$

lim u_n / lim v_n	$l > 0$	$l = 0$	$l < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$l' > 0$	ll'	0	ll'	$+\infty$	$-\infty$
$l' = 0$	0	0	0	F.I.	F.I.
$l' < 0$	ll'	0	ll'	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	F.I.	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	F.I.	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

- Limite de $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \geq 0}$

lim u_n	$l \neq 0$	$l = 0$	$+\infty$	$-\infty$
lim $\frac{1}{u_n}$	$\frac{1}{l}$	F.I.	0	0

F.I. = Forme indéterminée, cela veut dire qu'on ne peut pas conclure immédiatement (cela ne veut pas dire qu'il n'y a pas de limite).

exemples :

- $\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} + 4}{n^2 + n - n^3}$
- $\dfrac{n^{16} - n^{17}}{\frac{1}{n+1} - 2}$
- $\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + \left(-n^2 + n + 3\right) \times 2^{n+2}$
- $\left(n + \frac{1}{n} + \frac{10}{3^n + 4}\right)\left(\frac{1}{4^{n-1}} + n - 2n^2\right)$

exemples de F. I. . $\dfrac{n^2 - n}{n^2 - n^3}$

Proposition : Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites convergentes et vérifiant : $\forall n \geq n_0 \quad u_n \leq v_n$.

Alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

Proposition : Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ ayant pour limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$:

- $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{u_n} = e^{\ell}$
- si $\ell > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n) = \ln(\ell)$
  $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^{\alpha} = \ell^{\alpha}$ (où $\alpha \in \mathbb{R}$).
- si $\ell = 0$ et $u_n > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n) = -\infty$.
- si $\lim u_n = +\infty$, $\lim e^{u_n} = +\infty$
  $\lim \ln(u_n) = +\infty$

exemples : . $e^{\left(\frac{2}{3}\right)^n + n^2 - 1}$. $\ln(\sqrt{n+1} + 1)$
. $\ln\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}\right)$. $\ln(e^{-n} + 2)$

Théorème (de comparaison) : Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites vérifiant : $\lim u_n = +\infty$ et : $\forall n \geq n_0$, $u_n \leq v_n$.

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

On a également que, si $\lim u_n = -\infty$ et : $\forall n \geq n_0$, $u_n \geq v_n$ alors $\lim_{n \to +\infty} v_n = -\infty$

exemple : • $u_n = n^2 + (-1)^n$ • $u_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$

Théorème d'encadrement (ou des "gendarmes") :

Soient $(v_n)_{n \geq 0}$ et $(w_n)_{n \geq 0}$ deux suites qui convergent vers une même limite ℓ. Si, de plus, : $\forall n \geq n_0$, $v_n \leq u_n \leq w_n$.
Alors $(u_n)_{n \geq 0}$ converge et $\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$

exemple : $u_n = e^{-n} + \frac{(-1)^n}{n+1}$.

Définition : Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite.

• On dit que $(u_n)_{n \geq 0}$ est majorée si :
$\exists A \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq A$
A est alors un majorant de $(u_n)_{n \geq 0}$ — A ne dépend pas de n

• On dit que $(u_n)_{n \geq 0}$ est minorée si :
$\exists A \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq A$
A est alors un minorant de $(u_n)_{n \geq 0}$ — A ne dépend pas de n

• On dit que $(u_n)_{n \geq 0}$ est bornée si elle est majorée et minorée, ou encore, si $(|u_n|)_{n \geq 0}$ est majorée.

exemple : • $\frac{1}{1+n^2}$ • $e^{-n}+(-1)^n$

Définition : • On dit que $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante si :
$\forall n \geq 0 \quad u_{n+1} \geq u_n$
• On dit que $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante si :
$\forall n \geq 0 \quad u_{n+1} \leq u_n$

• Si $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante ou décroissante, on dit qu'elle est monotone.

exemple : • $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1}$ • $u_n = n^2+n+1$

Remarque : • On dit que $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante (resp. décroissante) à partir d'un certain rang si :
$\exists n_0 \in \mathbb{N}) \ \forall n \geq n_0, \ u_{n+1} \geq u_n$ (resp. $u_{n+1} \leq 0$).
• Si on veut parler de stricte croissance ou décroissante, il suffit d'avoir des inégalités strictes.

exemple : • $u_n = n^2 - 10n$

Méthodes : • Pour une suite définie par récurrence, calculer directement $u_{n+1} - u_n$
• Pour une suite définie explicitement par une forme $u_n = f(n)$. On peut étudier les variations de f sur $\mathbb{R}_+$.

. Si $u_n > 0$, on peut comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1.

Théorème (de la limite monotone) :

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite monotone :

- Si $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante et majorée alors $(u_n)_{n\geq 0}$ converge
- Si $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante et non majorée alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- Si $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et minorée alors $(u_n)_{n\geq 0}$ converge
- Si $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et non minorée alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Remarque : On peut remplacer l'hypothèse "croissante" par "croissante à partir d'un certain rang".

Proposition : Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite définie par récurrence par son premier terme u_0 et par la forme : $\forall n \geq 0$ $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction continue.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$

Méthode : . Le TLM permet d'affirmer l'existence d'une limite ℓ.
. La proposition ci-dessus permet de savoir quelle

l'équation vérifie la limite.

exemple : . $u_0 = 4$, $\forall n \geq 0$ $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 12}$

Méthode : Pour montrer que $\lim u_n = +\infty$, on peut, si elle est croissante, faire un raisonnement par l'absurde et supposer qu'elle est majorée.

exemple : . $u_0 = 2$ et : $\forall n \geq 0$ $u_{n+1} = u_n^3$.

Théorème (des suites adjacentes) : Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$.

Si :
- $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante
- $(v_n)_{n\geq 0}$ est décroissante
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$

Alors $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ convergent vers une limite commune $l \in \mathbb{R}$

exemple : . $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n \cdot n!}$

Proposition (croissances comparées) : Pour tous $\alpha > 0$, $\beta > 0$:

. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^\beta}{e^{\alpha n}} = 0$. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha} = 0$

. Si $q \in]-1,1[$: $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha q^n = 0$

- Si $q > 1$: $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^\alpha}{q^n} = 0$

<u>exemple :</u> $\cdot\ n^2 e^{-n}$ $\cdot\ \dfrac{\ln(n)^2}{\sqrt{n}}$ $\cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \cdot n^6$