Test n° 7

1 - ⓐ $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n n^2 + 3e^{-n} + \sqrt{n}\ln n$

Comme $\frac{3}{4} \in]-1,1[$, par croissances comparées (C.C.) : $\left(\frac{3}{4}\right)^n n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

de plus $3e^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc, comme $\sqrt{n}\ln n \longrightarrow +\infty$:

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty .}$$

ⓑ $$v_n = \frac{n^2\ln n + e^{-2n}n^2 + 1}{n(\ln n)^2 + 3n} = \frac{n^2\ln n\left(1 + e^{-2n}/\ln n + 1/n^2\ln n\right)}{n(\ln n)^2\left(1 + 3/\ln n^2\right)}$$

$$= \frac{n}{\ln n}\left(\frac{1 + e^{-2n}/\ln n + 1/n^2\ln n}{\left(1 + 3/\ln n^2\right)}\right)$$

Par C.C. $\frac{n}{\ln n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc $\boxed{v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty}$

ⓒ $$w_n = \left(\ln 2 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(\ln 2 + \frac{1}{n}\right)}$$

on a $\lim \ln\left(\ln 2 + \frac{1}{n}\right) = \ln(\ln 2)$

or $\ln 2 \in]0,1[$ donc $\ln(\ln 2) < 0$ donc $n\ln\left(\ln 2 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$

donc $\boxed{w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$

ⓓ $$v_n = \sqrt{n-2} - \sqrt{n+2} = \frac{n-2-(n+2)}{\sqrt{n-2}+\sqrt{n+2}} = \frac{-4}{\sqrt{n-2}+\sqrt{n+2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{0}.$$

2 – ⓐ Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, posons $P(n) =$ " $0 \leq u_n \leq 1$ ".

- $u_0 = \frac{1}{2}$ donc $P(0)$ est vrai
- Si : $0 \leq u_n \leq 1$ alors $\sqrt{0} \leq \sqrt{u_n} \leq \sqrt{1}$ donc $0 \leq u_{n+1} \leq 1$

donc $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

ⓑ $\forall n \geq 0$, $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n} - u_n = \underbrace{\sqrt{u_n}}_{\geq 0} \underbrace{(1 - \sqrt{u_n})}_{\geq 0} \geq 0$

d'après (a)

donc (u_n) est croissante. Comme elle est majorée par 1 (u_n) converge vers un réel $\ell \in [0,1]$.

Comme $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$, on a $\ell = \sqrt{\ell}$ donc $\ell^2 = \ell$

donc $\ell = 0$ ou $\ell = 1$.

Or $u_n \geq u_0 = \frac{1}{2}$ car (u_n) est croissante donc $\ell \geq \frac{1}{2}$ donc $\boxed{\ell = 1}$

3 – (a) Par récurrence sur $n \geq 0$, prouvons $P(n) =$ " $v_n \in [0,1]$ "

- $v_0 = 0$ donc $P(0)$ est vrai.
- Si $0 \leq v_n \leq 1$ alors $0 \leq v_n^2 \leq 1$

donc $\frac{0+1}{2} \leq \frac{v_n^2+1}{2} \leq \frac{1+1}{2}$

donc $0 \leq \frac{1}{2} \leq v_{n+1} \leq 1$

donc $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

(b) $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1 + v_n^2 - 2v_n}{2} = \dfrac{(1-v_n)^2}{2} \geq 0$

donc (v_n) est croissante.

Comme elle est majorée par 1, $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in [0,1]$.

Enfin, comme $v_{n+1} = \dfrac{1+v_n^2}{2}$, on a $\ell = \dfrac{1+\ell^2}{2} \iff \dfrac{(\ell-1)^2}{2} = 0$
$\iff \ell = 1$.

Donc $\boxed{v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}$

4 –

```
n = int(input('rentrer un entier positif'))
u = 1/2 ; v = 0
for k in range(n):
    u = sqrt(u)
    v = (1+v**2)/2
print(u,v)
```

4* –

```
u = 1/2 ; n = 0
while u < 0.8:
    u = sqrt(u)
    n = n+1
print(n)
```

5 – On a : $nx - 1 \leq \lfloor nx \rfloor < nx$

donc $x - \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} < x$

Or $x - \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$ et $x \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$, donc par encadrement :

$$\boxed{\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x}$$

6 — (a) $u_n = \dfrac{\ln(n!)}{n^2}$. On a $\ln(n!) = \ln(1.2 \dots n)$

$= \ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln n$

$\leq \ln n + \ln n + \dots + \ln n = n \ln n$

Ainsi : $0 \leq u_n \leq \dfrac{n \ln n}{n^2} = \dfrac{\ln n}{n}$.

Or $\dfrac{\ln n}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ par C.C. donc par encadrement : $\boxed{u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 .}$

(b) $v_n = \sqrt{n}\, \ln\left(\dfrac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}-1}\right) = \sqrt{n}\, \ln\left(\dfrac{\sqrt{n}-1+2}{\sqrt{n}-1}\right)$

$= \sqrt{n}\, \ln\left(1 + \dfrac{2}{\sqrt{n}-1}\right)$

Or, on sait que si $f(x) = \ln(1+x)$, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$ donc $f'(0) = 1$, donc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = 1$.

C'est-à-dire que : $\dfrac{\ln(1+h)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} 1$.

Ainsi $\sqrt{n}\, \ln\left(1 + \dfrac{2}{\sqrt{n}-1}\right) = \dfrac{\ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}-1}\right)}{\frac{2}{\sqrt{n}-1}} \cdot \sqrt{n} \cdot \dfrac{2}{\sqrt{n}-1}$

Comme $\dfrac{2}{\sqrt{n}-1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, on a $\dfrac{\ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}-1}\right)}{\frac{2}{\sqrt{n}-1}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$, et $\dfrac{\sqrt{n} \cdot 2}{\sqrt{n}-1} = \dfrac{2}{1-\frac{1}{\sqrt{n}}} \to 2$

donc $\boxed{v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 2}$ (Nous reverrons cette méthode au moment du chapitre sur les dérivées)