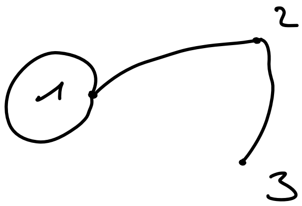
Théorie des Graphes

Définition: Un graphe non orienté G est un couple (S, A) où S est un ensemble fini de sommets et A un ensemble de paires de sommets, appelées arêtes.

On appelle ordre du graphe le nombre de ses sommets.

Remarque: Un graphe peut se dessiner de plusieurs manières :

Soit $G = (\underbrace{\{1,2,3\}}_{3 \text{ sommets}}, \{\underbrace{1-1, 1-2, 3-2}_{3 \text{ arêtes}}\})$



Ces deux dessins représentent le même graphe G.

Définitions: Une boucle est une arête reliant un sommet à lui-même.

Deux sommets sont adjacents si une arête les relie.

Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes dont il fait partie.

Un sommet est isolé si son degré est nul.

exemple: Soit G d'ordre 5 :

On peut regrouper les degrés d'un graphe dans un tableau:

S	1	2	3	4	5
d	4	2	1	1	0

une boucle compte pour 2 degrés

Définition : Un graphe orienté G est un graphe où les arêtes sont des couples.

Remarque : Cela signifie que les arêtes ont un sens, par exemple $G = (\{1,2\},\{1 \to 2\})$ est un graphe orienté qu'on peut dessiner ainsi : $1 \longrightarrow 2$

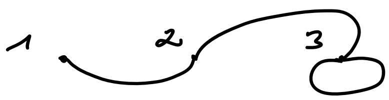
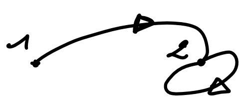
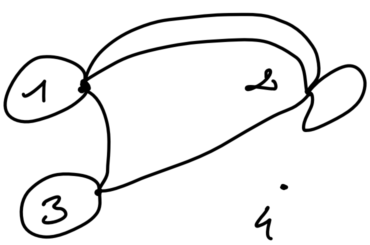
Définition : Étant donné G un graphe comportant les sommets $(s_1,\dots,s_n)$. On définit la matrice d'adjacence $M = (m_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}}$ de G où m_{ij} vaut le nombre d'arêtes reliant le sommet s_i au sommet s_j.

Remarque : Si G n'est pas orienté on a donc $m_{ij} = m_{ji}$ donc M est symétrique.

Si G n'a pas de boucles alors la diagonale de G est pleine de zéros.

La matrice d'adjacence définit parfaitement un graphe (au nom des sommets près).

exemples :

Graphes	Matrice d'adjacence
	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

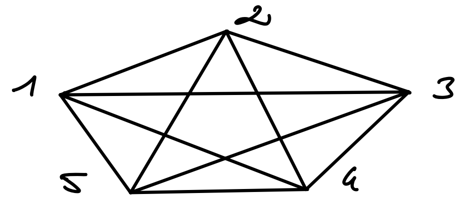
Définition : Un graphe non orienté est :

- simple s'il ne comporte ni boucles ni arêtes multiples entre deux mêmes sommets

- complet si tous ses sommets sont adjacents.

__Remarque :__ De manière équivalente, un graphe est simple si sa matrice d'adjacence ne comporte que des 0 ou des 1 et si sa diagonale est nulle. Un graphe est complet si sa matrice d'adjacence n'a aucun coefficient nul en dehors de sa diagonale.

__exemple :__ Le graphe simple et complet d'ordre 5 :



__Définitions :__ Une chaîne (ou chemin) est une liste finie de sommets telle que chaque paire de sommets consécutifs de la liste soit une arête du graphe.

La longueur d'une chaîne est le nombre d'arêtes dont elle est constituée

Une chaîne est fermée si le premier et le dernier sommet sont identiques.

Une chaîne est simple si chaque arête n'est empruntée qu'au plus une fois.

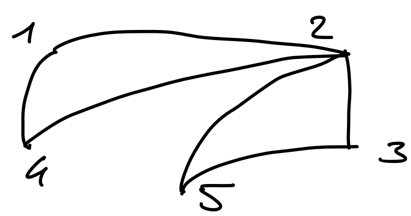
Un cycle est une chaîne fermée et simple.

Une chaîne eulérienne est une chaîne contenant chaque arête du graphe une seule fois.

Un cycle eulérien est une chaîne eulérienne fermée.

__exemple :__

- 1-2-3-5-2-1 est un cycle de longueur 5
- 1-2-1 est une chaîne fermée non simple de longueur 2



Théorème : Soit $\mathcal{G}$ un graphe d'ordre n et M sa matrice d'adjacence.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tous $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ le (i,j)-ème coefficient de la matrice M^k est égal au nombre de chaînes de longueur k reliant le sommet i au sommet j.

Preuve : Par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$.

- Pour $k=1$, on retrouve la définition de M (chaîne de longueur 1 = arête)
- Supposons le résultat vrai pour un entier $k \geq 1$.

Soient $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ $\quad \underbrace{M^{k+1}[i,j]}_{\text{le coef } (i,j) \text{ de } M^{k+1}} = M.M^k[i,j] \underbrace{=}_{\text{par définition du produit matriciel}} \sum_{p=1}^{n} M[i,p].\,M^k[p,j]$

Notons alors $C_k(i,j)$ l'ensemble des chaînes de longueur k reliant le sommet i au sommet j et $C_k^p(i,j)$ celles passant par le sommet p. (Ainsi $\mathrm{Card}(C_k(i,j)) = M^k[i,j]$ par HR)

Notons de plus qu'une chaîne de longueur $k+1$ reliant i à j est composée d'une chaîne de longueur 1 reliant i à p (où $p \in [\![1,n]\!]$) et d'une chaîne de longueur k reliant le sommet p à j. Formellement, cela donne :

$$C_{k+1}(i,j) = \bigsqcup_{p=1}^{n} C_1(i,p) \underbrace{\times}_{\text{produit cartésien}} C_k(p,j)$$

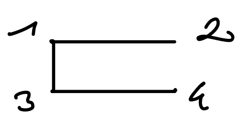
Par propriétés des cardinaux, on retrouve donc :

$$\mathrm{Card}(C_{k+1}(i,j)) = \sum_{p=1}^{n} \mathrm{Card}(C_1(i,p)) \times \mathrm{Card}(C_k(p,j))$$

$$\overset{HR}{=} \sum_{p=1}^{n} M[i,p] \times M^k[p,j] = M^{k+1}[i,j].$$

La propriété donc vraie au rang 1 et héréditaire.

exemple : Soit $\mathcal{G}$:



de matrice d'adjacence $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

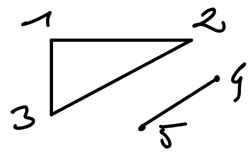
Le nombre de chemins de longueur 5 reliant 1 à 4 vaut donc le coefficient ligne 1, colonne 4 de la matrice M^5.

Définition : Un graphe est connexe si chaque paire de sommets peut être reliée par une chaîne.

exemples :

- 

connexe

- 

non connexe
(pas de chaîne reliant 1 à 4 par exemple)

- Un graphe complet est connexe (la réciproque est fausse, voir ci-dessus)
- Un graphe possédant un sommet isolé n'est pas connexe

Théorème : Soit G un graphe non orienté et connexe.

- G possède un cycle eulérien si et seulement si les degrés de ses sommets sont tous pairs.
- G possède une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de degré impair vaut 0, 1 ou 2.

Preuve du premier point : Si G possède un cycle eulérien alors, à l'exception du sommet de départ, quand on emprunte ce cycle et qu'on passe par un sommet, on part de ce sommet par une autre arête (car la chaîne est un cycle) donc les degrés sont des multiples de 2 (on peut passer plusieurs fois par un sommet). Pour le sommet de départ, il y a l'arête du départ qui se paire avec la dernière arête du cycle. Donc tous les sommets sont de degrés pairs.

Réciproquement, si chaque sommet est de degré pair, partons d'un sommet quelconque s_1, empruntons des arêtes successivement en empruntant des arêtes différentes. On est nécessairement bloqué après un certain nombre de déplacements sur le sommet s_1, en effet tous les sommets étant de degré pair, on peut partir de chaque sommet par lequel on est arrivé, donc celui qui reste est celui du départ.

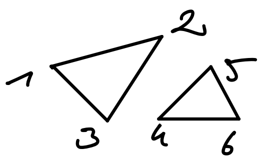
A l'issue de ce procédé on a donc construit un cycle $s_1 \ldots\ldots s_1$ qui contient donc un nombre pair d'arêtes.

Si ce cycle passe par toutes les arêtes du graphe on a terminé, sinon, on choisit un des sommets de ce cycle duquel part une arête qui n'a pas été empruntée (un tel sommet existe car le graphe est connexe).

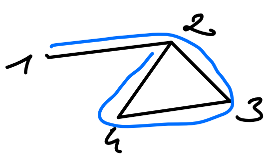
On recommence alors le même procédé et on a un cycle qu'on peut incorporer au précédent.

Comme il y a un nombre fini d'arêtes, ce procédé va aboutir à la construction d'un cycle eulérien.

<u>exemples:</u>



Ce graphe ne comporte pas de cycle eulérien car il n'est pas connexe.



Ce graphe a une chaîne eulérienne mais pas de cycle eulérien.

<u>Proposition (Formule des poignées de mains)</u> : Dans tout graphe la somme des degrés des sommets est égale au double du nombre d'arêtes.

<u>Preuve</u>: Chaque arête ajoute deux degrés (1 à chaque extrémité ou 2 au sommet si c'est une boucle).

<u>exemple</u>: Dans un groupe de 10 personnes, il y a N poignées de mains.

Chaque personne est un sommet et les poignées de mains sont les arêtes. Chaque sommet est de degré 9 (chaque personne serre la main à toutes les autres) la somme des degrés vaut donc $9 \times 10 = 90$. Il y a donc $N = 90/2 = 45$ arêtes ou poignées de mains.

Notons que $45 = \binom{10}{2}$: le nombre de choix de 2 personnes parmi 10.

Théorème : Soit G un graphe d'ordre n et A sa matrice d'adjacence.

G est connexe si et seulement si la matrice $I+A+A^2+\dots+A^{n-1}$ ne possède aucun zéro.

Preuve : Soient $i\neq j$ dans $[\![1,n]\!]$.

- Si G est connexe il existe une chaîne reliant i à j. Comme il y a n sommets, on peut trouver une chaîne de longueur au plus $n-1$ (en ne passant pas plus d'une fois par chaque sommet). Notons $k\in[\![1,n-1]\!]$ cette longueur, ainsi $A^k[i,j]>0$ donc $(I+A+\dots+A^{n-1})[i,j]>0$ (tous les coefficients de ces matrices sont ≥ 0).

  Bien sûr pour $i=j$ le coefficient (i,i) de I est égal à $1>0$ donc $(I+A+\dots+A^{n-1})[i,i]>0$.

- Si $I+A+\dots+A^{n-1}$ n'a aucun zéro alors pour au moins un $k\in[\![1,n-1]\!]$ $A^k[i,j]>0$ donc il y a un chemin (de longueur k) reliant i à j. Donc G est connexe.

Remarque : Visuellement il est aisé de dire si un graphe est connexe ou non. Ce théorème nous servira en informatique notamment.

Définition : Un graphe pondéré est un graphe où un nombre positif est associé à chaque arête.