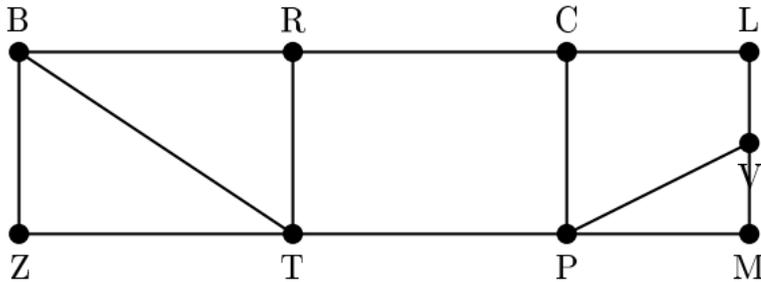
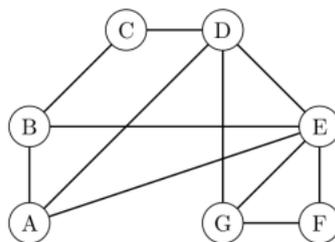


TD : Théorie des Graphes

1. Lors d'une soirée, l'on entend 21 tintements de verre. Combien y a-t-il de personnes présentes à la soirée ? S'il y en a 55 ?
2. Le graphe ci-dessous représente les autoroutes entre les principales villes du Sud de la France : Bordeaux (B), Clermont-Ferrand (C), Lyon (L), Marseille (M), Montpellier (P), Brive (R), Toulouse (T), Valence (V) et Biarritz (Z)



- a. Déterminer la matrice d'adjacence M de ce graphe.
 - b. Quel est l'ordre de ce graphe ? Dresser le tableau des degrés de chaque sommet.
 - c. Écrire une fonction Python qui prend en argument une matrice d'adjacence A et renvoie l'ordre du graphe. Le vérifier avec M .
 - d. Ce graphe est-il connexe ? Est-il complet ?
 - e. Écrire une fonction Python qui prend en argument une matrice d'adjacence A et un sommet i et renvoie le degré du sommet i . Le vérifier avec M .
 - f. Existe-t-il un itinéraire permettant d'emprunter chaque autoroutes une seule fois ?
3. On considère le graphe ci-dessous :



- a. Le graphe est-il connexe ? complet ? eulérien ? simple ?
- b. Est-il de possible de construire un chemin ne passant qu'une seule fois par chaque arrête ?
- c. Déterminer la matrice d'adjacence qu'on appelle P du graphe.

d. On a rentré les commandes suivantes dans la console :

```
1 import numpy as np
2 import numpy.linalg as al
3
4
5 P=np.array([[0,1,0,1,1,0,0],[1,0,1,0,1,0,0],[0,1,0,1,0,0,0],[1,0,1,0,1,0,1],[1,0,1,0,1,0,1],[0,1,0,1,0,0,0],[1,0,1,0,1,0,1]])
6 print(al.matrix_power(P,4))
```

```
[[24 14 16 18 28 12 21]
 [14 22  5 27 19 14 14]
 [16  5 13  7 20  5 13]
 [18 27  7 35 27 19 18]
 [28 19 20 27 43 16 26]
 [12 14  5 19 16 12 12]
 [21 14 13 18 26 12 21]]
```

Donner le nombre de chemins de longueur 4 reliant le sommet A au sommet D.

e. Donner sans calcul la dernière colonne de la matrice P^2 .

4. Soit G un graphe non-orienté simple d'ordre $2p$. On suppose que le degré de chaque sommet est au moins égal à p . Démontrer que ce graphe est connexe.

5. Dans un groupe de personnes, il y a toujours deux personnes qui connaissent exactement le même nombre de membres du groupe.

a. Formuler cette assertion avec le vocabulaire des graphes.

b. Démontrer cette assertion (on pourra raisonner par l'absurde et supposer que la propriété à prouver n'est pas vraie pour un graphe à n sommets).

6. Voici un plan de Kaliningrad. Est-il possible de faire une balade en passant une seule fois par chaque pont ?

