TD : Limites de fonctions

1. Déterminer les limites suivantes :
   (a) $\lim\limits_{x\to 1^-} \lfloor x \rfloor$. (b) $\lim\limits_{x\to -1^+} \lfloor x \rfloor$. (c) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x-1}{x}$. (d) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x+1}{x}$. (e) $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}$. (f) $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x^2}}$.
   (g) $\lim\limits_{x\to 1^+} \ln(1-x)$. (f) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(e^x - 1)$.

2. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$: $e^x \geqslant x+1$.

   En déduire $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x^2}$.

   (b) Montrer à l'aide d'un encadrement que $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x} = 1$.

   (c) Montrer que $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(-1)^{\lfloor x \rfloor}}{\sqrt{x}} = 0$.

   (d) On définit la fonction suivante : pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = x + (x - \lfloor x \rfloor)^2$.
   Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$: $x \leqslant f(x) \leqslant x+1$. En déduire $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

3. Déterminer les limites suivantes :
   (a) $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{-x}(x^2 + \ln(x))$.
   (b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{3x}}{7x^2 + \ln(x)}$.
   (c) $\lim\limits_{x\to 0} x \ln(x e^{\frac{1}{x}})$.
   (d) $\lim\limits_{x\to 1^+} (x-1)\ln(x-1)$.

4. Soit $f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$.

   Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f et déterminer ses limites aux bords de $\mathcal{D}_f$.
   En déduire un tracé sommaire de la courbe de f.

5. $\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$: $f(x) = \dfrac{x}{1-x} e^{\frac{-1}{x}}$.
   (a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.
   (b) Calculer $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$.
   (c) Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$.
   (d) Déterminer le sens de variation de f. En déduire un tracé de l'allure de sa courbe.