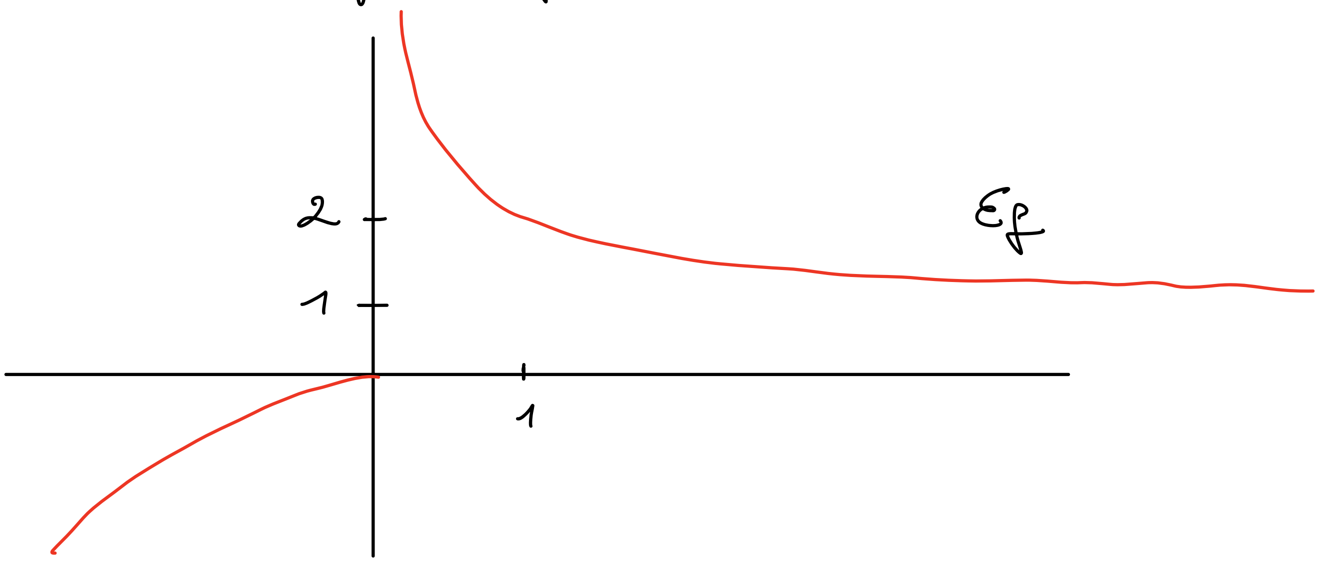
Limites de fonctions

Voici la courbe d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



Il semble que, lorsque x "s'approche de 0" par les valeurs négatives, $f(x)$ s'approche de 0, et que lorsque x s'approche de 0 par les valeurs positives, $f(x)$ devient de plus en plus grand.
Formalisons ces intuitions avec des quantificateurs, de manière analogue aux suites.

Définition : Soit $I =]a,b[$ (ou $]a,b]$ ou $[a,b]$ ou $[a,b[$) un intervalle borné $(a,b \in \mathbb{R})$. On appelle extrémités de I les réels a et b. Ils ne sont donc pas toujours dans I.

Définition : Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I. Soit $x_0 \in I$ ou une extrémité de I. On dit que f a une limite finie en x_0, notée $\ell = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \underbrace{\exists \delta > 0 \ / \ \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap I}_{\text{pour } x \text{ suffisamment proche de } x_0},\ \underbrace{|f(x) - \ell| \leq \varepsilon}_{f \text{ s'approche de } \ell \text{ à } \varepsilon\text{-près}}.$$

Remarque : Comme pour les suites, ce nombre l est unique, ce qui justifie la notation $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Définition / Propriété : Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$ ou une extrémité de I.

On dit que f a une limite finie à droite en x_0, notée $l = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ si :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \forall x \in [x_0, x_0+\delta[\cap I, \ |f(x) - l| \leq \varepsilon$.

On dit que f a une limite finie à gauche en x_0, notée $l = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ si :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \forall x \in]x_0-\delta, x_0] \cap I, \ |f(x) - l| \leq \varepsilon$.

On a la propriété essentielle en pratique :

Si $x_0 \in I$, f admet des limites finies à droite et à gauche en x_0 qui sont égales si et seulement si f admet une limite finie en x_0.

ex : Dans le premier exemple, on peut conjecturer que $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$ et que la limite en 0^+ n'est pas finie. Donc f n'admet pas de limite en 0.

En $x_0 = 1$, il semble que les limites à droite et à gauche sont finies et égales à 2, ce qui entraîne $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$.

Définition : Soit $f :]a, x_0[\cup]x_0, b[= J \longrightarrow \mathbb{R}$

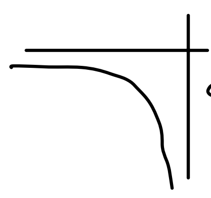
On dit que f admet $+\infty$ (resp. $-\infty$) pour limite en x_0 si :

$\forall A \in \mathbb{R}, \ \exists \delta > 0 \mid \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap J, \ f(x) \geq A$ (resp. $f(x) \leq A$)

On définit de la même manière les limites $+\infty$ ou $-\infty$ à droite ou à gauche en x_0.

On a dans l'exemple : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

On a aussi $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$.



Courbe de $x \mapsto \frac{1}{x}$ à gauche de 0.

Définition : Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ où $+\infty$ est l'extrémité droite de I.

f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$, noté $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, si :

$\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in I \mid \forall x \geq B, \quad f(x) \geq A$.

"quel que ce soit le nombre A, pour tous les x suffisamment grand, $f(x) \geq A$"

Dans notre exemple, graphiquement $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Ou encore, on sait que $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

Définition : Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ où l'extrémité de droite de I est $+\infty$.

On dit que f a pour limite $l \in \mathbb{R}$ en $+\infty$, noté $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ si :

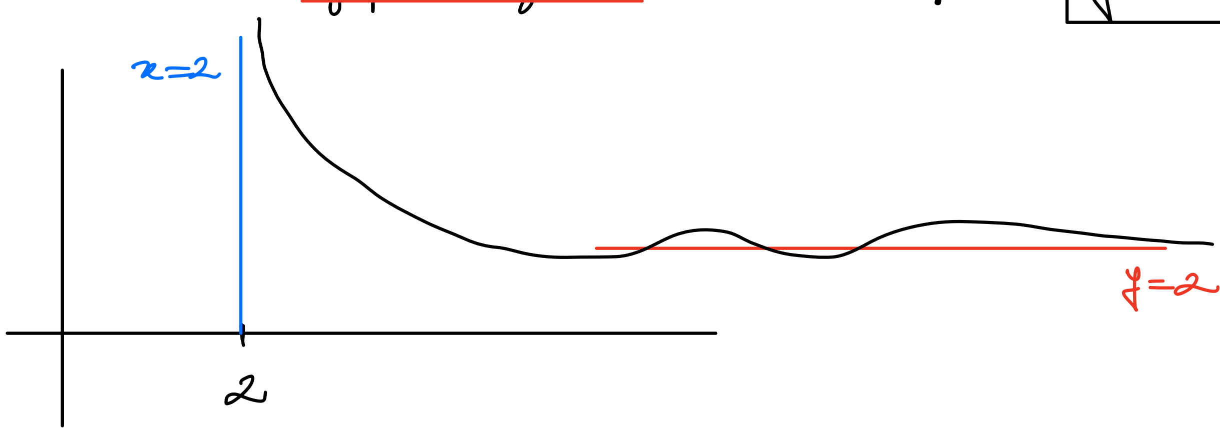
$\forall \varepsilon > 0, \exists B \in I \mid \forall x \geq B, \quad |f(x) - l| \leq \varepsilon$

Dans notre exemple, graphiquement $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

Ou encore, on sait que $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Graphiquement : . Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$, on dit que f admet une asymptote verticale en x_0 d'équation $\boxed{x = x_0.}$

. Si $\lim_{x \to +\infty \text{ ou } -\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$, on dit que f admet une asymptote horizontale en $+\infty$ ou $-\infty$ d'équation $\boxed{y = l.}$



Règles et théorèmes de manipulations des limites :

- Les opérations sur les limites sont identiques à celles sur les suites.

A la différence des suites, où on étudie toujours $\lim_{n \to +\infty} u_n$ (c'est tout le temps $n \to +\infty$), pour les fonctions x peut tendre vers $+\infty$, $-\infty$, x_0, x_0^+, x_0^-.
Donc on fait attention à étudier à ne pas mélanger $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to x_0} f(x)$ quand on veut utiliser un théorème de comparaison ou d'encadrement.

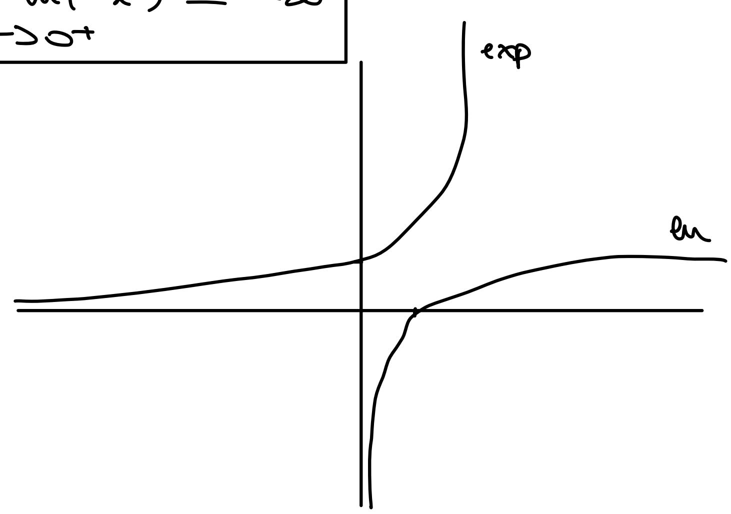
Par exemple : on a l'inégalité, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{1}{x} + 1 \leq e^{\frac{1}{x}}$.
Comme $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} + 1 = +\infty$, alors $\lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$ par comparaison.

en revanche le fait que $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} + 1 = -\infty$ ne nous donne aucune indication sur la valeur éventuelle de $\lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}}$.

Rappelons tout de même les limites usuelles :

- $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$
- $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$

À retenir en apprenant les courbes !



Enfin, on a les croissances comparées :

Pour tous $\alpha>0$ et $\beta>0$:

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty \quad \text{et donc} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = 0 \\ \bullet \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0 \quad \text{et donc} \quad \lim_{x\to 0^+} x^\beta . (\ln x)^\alpha = 0 \end{array}}$$

exemple : $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \sqrt{x}(\ln x)^2 = 0$; $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^{10} e^{x} = 0$.

Composition de limites.

Proposition : Soient $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$

- Si $\displaystyle\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ et $\displaystyle\lim_{x\to \ell} g(x) = L$

Alors $\displaystyle\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = L$

où x_0, ℓ et L peuvent valoir $+\infty$ ou $-\infty$.

exemple : Si $h(x) = e^{-x^2+10x+1}$.

Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -x^2+10x+1 = -\infty$ et que $\displaystyle\lim_{X\to-\infty} e^X = 0$

alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2+10x+1} = 0$.

Proposition : Si $\lim u_n = \ell$ et $\displaystyle\lim_{x\to\ell} f(x) = L$ alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = L$

exemple : $v_n = \ln(n^6 e^{-n})$. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^6 e^{-n} = 0$ par croissances comparées, et

$\displaystyle\lim_{X\to0} \ln(X) = -\infty$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.