Test 8 : Corrigé

1 $u_n = n^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n + n \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

- $\frac{\sqrt{2}}{2} \in [0,1[$ donc par croissance comparée : $\lim_{n\to+\infty} n^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 0$
- $\ln\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ car $\frac{1}{2} < 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} n \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\infty$

Donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty}$.

$$v_n = \frac{n^2\sqrt{\ln n} + e^{-n}}{\sqrt{n}(\ln n)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{n^2\sqrt{\ln n}\left(1+\frac{e^{-n}}{n^2\sqrt{\ln n}}\right)}{\sqrt{n}(\ln n)^2\left(1+\frac{(1/3)^n}{\sqrt{n}(\ln n)^2}\right)} = \frac{n^{1,5}\left(1+\frac{e^{-n}}{n^2\sqrt{\ln n}}\right)}{(\ln n)^{1,5}\left(1+\frac{(1/3)^n}{\sqrt{n}(\ln n)^2}\right)}$$

or $\lim_{n\to+\infty} 1+\frac{e^{-n}}{n^2\sqrt{\ln n}} = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{(1/3)^n}{\sqrt{n}(\ln n)^2} = 0$ car $\frac{1}{3} \in]-1,1[$

et $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{1,5}}{(\ln n)^{1,5}} = +\infty$ par C.C donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty}$

$w_n = \sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k}$. On a, pour $k \geq 1$, $k\sqrt{k} \geq 1$

donc $w_n \geq \sum_{k=1}^{n} 1 = n$

Ainsi par théorème de comparaison : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} w_n = +\infty}$

2 $u_0 = 3$; $u_{n+1} = u_n \ln(u_n)$

ⓐ Prouvons $P(n) =$ "$u_n \geq 3$" par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

- $u_0 = 3$. $P(0)$ vraie
- Si $u_n \geq 3$ alors $\ln(u_n) \geq \ln 3 \geq \ln e = 1$

donc $u_{n+1} = u_n \ln(u_n) \geq u_n \geq 3$

Ainsi $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

(b) Monotonie ? $u_{n+1}-u_n = u_n(\ln(u_n)-1)$

Comme $u_n \geq 3$, on a $\ln(u_n)-1 \geq \ln(e)-1=0$

Donc $u_{n+1}-u_n \geq 0$ donc (u_n) est croissante.

Supposons par l'absurde que (u_n) est majorée.

Dans ce cas (u_n) converge vers un réel $\ell \geq 3$ (Théorème de limite monotone)

Ainsi $\ell = \ell . \ln(\ell)$ donc $1 = \ln \ell$ donc $\ell = e$.

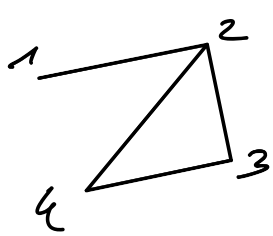
C'est absurde car $\ell \geq 3$ et $e < 3$.

Donc (u_n) n'est pas majorée, donc $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$

3 (a) Si G est simple et complet d'ordre 10, chaque sommet est de degré 9, donc la somme des degrés vaut 9×10.

Ainsi, il y a $\frac{9 \times 10}{2} = \boxed{45 \text{ arêtes}}$.

(b)



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & \boxed{1} & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Il y a $\boxed{1}$ chaîne de longueur 2 reliant 2 à 3

$\boxed{1e^*}$ On reprend $w_n = \sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k}$.

ⓐ $\lim \frac{w_n}{n\sqrt{n}}$?

On a $k\sqrt{k} \geq k$ car $\sqrt{k} \geq 1$

donc $w_n \geq \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Ainsi $\frac{w_n}{n\sqrt{n}} \geq \frac{n+1}{2\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

donc par comparaison : $\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{w_n}{n\sqrt{n}} = +\infty.}$

ⓑ $\lim \frac{w_n}{n^4}$? On a $k\sqrt{k} \leq k^2$ car $\sqrt{k} \leq k$ si $k \geq 1$

Ainsi $w_n \leq \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{12}$

Donc $\frac{w_n}{n^4} \leq \frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^4} = \frac{1(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})}{12n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

De plus $w_n = \sum k\sqrt{k} \geq 0$ donc $\frac{w_n}{n^4} \geq 0$ donc par théorème d'encadrement :

$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{w_n}{n^4} = 0}$