

# Cardinaux, dénombrement, sommes doubles

## 1 - Cardinaux des ensembles finis

Définition: Soit  $E$  un ensemble fini. On note  $\text{Card}(E)$  le nombre d'éléments de  $E$ .

exemple:  $\text{Card}(\emptyset) = 0$  ;  $\text{Card}([1, m]) = m$  ;  $\text{Card}([p, m]) = m - p + 1$ .

Propriété: Soient  $A, B$  et  $C$  trois ensembles finis.

- $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$ .
- $\text{Card}(A \cup B \cup C) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) + \text{Card}(C) - \text{Card}(A \cap B) - \text{Card}(A \cap C) - \text{Card}(B \cap C) + \text{Card}(A \cap B \cap C)$
- $\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B)$ .

le produit cartésien

exemple:  $\text{Card}(\{0, 1\} \times \{0, 1, 2\}) = 2 \times 3 = 6$ . Voir:

$$\{0, 1\} \times \{0, 1, 2\} = \{(0, 0); (0, 1); (0, 2); (1, 0); (1, 1); (1, 2)\}.$$

## 2 - Sommes doubles

On rappelle que  $\mathbb{N}^2$  = l'ensemble des couples d'entiers naturels.

Définition: Soit  $I \subset \mathbb{N}^2$  un sous ensemble fini de  $\mathbb{N}^2$ . Soit  $(a_{ij})_{(i,j) \in I}$  des réels (il y en a donc  $\text{Card}(I)$ ), on note leur somme:

$$\sum_{(i,j) \in I} a_{ij}.$$

exemples: Si  $I = \{(1, 1); (1, 3); (2, 1)\}$   $\sum_{(i,j) \in I} \frac{i}{j} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{2}{1}$ .

$$\text{Si } I = [1, m] \times [1, p] \quad \sum_{(i,j) \in I} a_{ij} = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^m a_{ij} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^p a_{ij}$$

Remarque: Lorsque les indexations de 2 sommes sont indépendantes l'une de l'autre, on peut permuter les deux symboles  $\Sigma$ .

exemple:  $\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m i = \sum_{i=1}^m i \sum_{j=1}^m 1 = \sum_{i=1}^m i m = \frac{m(m+1)}{2} m$

• Que faire lorsque les indexations dépendent l'une de l'autre ?

exemple 1:  $\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^i a_{ij} = \sum_{j=0}^m \sum_{i=j}^m a_{ij}$

$$\begin{matrix} 0 \leq i \leq m \\ 0 \leq j \leq i \end{matrix} \iff \begin{matrix} 0 \leq j \leq m \\ j \leq i \leq m \end{matrix}$$

exemple 2:  $\sum_{i=2}^m \sum_{j=i}^m a_{ij} = \sum_{j=2}^m \sum_{i=2}^j a_{ij}$

$$\begin{matrix} 2 \leq i \leq m \\ i \leq j \leq m \end{matrix} \iff \begin{matrix} 2 \leq j \leq m \\ 2 \leq i \leq j \end{matrix}$$

Propriété: Soit  $m \geq 1$ ,  $\sum_{k=1}^m k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$ .

Preuve: Soit  $m \geq 1$ , posons  $S_m = \sum_{k=1}^m k^2$ .

$$S_m = \sum_{k=1}^m k^2 = \sum_{k=1}^m k \cdot k = \sum_{k=1}^m k \sum_{i=1}^k 1 = \sum_{i=1}^m \sum_{k=i}^m k$$

$$= \sum_{i=1}^m \left( \sum_{k=1}^m k - \sum_{k=1}^{i-1} k \right) = \sum_{i=1}^m \frac{m(m+1)}{2} - \frac{(i-1)i}{2}$$

$$= \frac{m(m+1)}{2} \sum_{i=1}^m 1 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m i = \frac{m^2(m+1)}{2} - \frac{1}{2} S_m + \frac{1}{2} \frac{m(m+1)}{2}$$

Ainsi  $S_m = \frac{m^2(m+1)}{2} - \frac{1}{2} S_m + \frac{m(m+1)}{4}$  donc  $\frac{3}{2} S_m = \frac{2m^2(m+1) + m(m+1)}{4}$

donc  $S_m = \frac{2m^2(m+1) + m(m+1)}{6} = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$ .

Remarque: On peut aussi prouver le résultat par récurrence, ce qui est moins technique, mais il faut connaître la formule à l'avance pour faire une récurrence.

### 3\_ Dénombrement.

Definition: Soit  $m \in \mathbb{N}^*$ , on note  $m! = \prod_{i=1}^m i = 1 \times 2 \times \dots \times m$ .  
On pose par convention  $0! = 1$ .

Proposition:  $m!$  correspond au nombre de permutations possibles d'un ensemble composé de  $m$  éléments.

Plus précisément, soit  $E = \{a_1, \dots, a_m\}$  un ensemble à  $m$  éléments,  
 $m!$  est le nombre de listes ordonnées formées à partir des  $m$  éléments de  $E$ .

exemple: Soit  $E = \{1, 2, 3\}$ , il y a  $3! = 6$  façons possibles de ranger les éléments de  $E$ :  
 $(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)$ .

Car il y a : 3 choix pour le premier élément, 2 pour le second, 1 pour le 3<sup>ème</sup>:  $3 \times 2 \times 1 = 3!$

Remarque: Si on ne veut faire une liste de  $p$  éléments (où  $p \in [1, m]$ ),  
il y en a donc que  $m \times (m-1) \times \dots \times (m-p+1) = \frac{m!}{(m-p)!}$ .  
On appelle cela un arrangement à  $p$  éléments de  $E$ .

exemple: . Il y a  $32 \times 31 \times 30$  façons de constituer un top 3 dans une classe de 32 élèves. ( $\frac{32!}{29!} = 32 \times 31 \times 30$ )  
 . Il y a  $100!$  façons d'arranger une bibliothèque de 100 ouvrages.

Définition: Soit  $k, m \in \mathbb{N}$ . On note  $\binom{m}{k}$  le nombre de sous-ensemble à  $k$  éléments d'un ensemble à  $m$  éléments.

Remarque: Cela s'appelle un coefficient binomial et se lit "k parmi m".

Concrètement c'est le nombre de façons de choisir k objets parmi m objets.

Proposition: . Si  $k > m$   $\binom{m}{k} = 0$  .  $\binom{m}{0} = \binom{m}{m} = 1$  .  $\binom{m}{1} = m$ .

Preuve: . Si  $k > m$ , il n'y a pas d'ensembles à  $k$  éléments d'un ensemble à  $m$  éléments.

.  $\binom{m}{0} = 1$  car  $\emptyset$  est le seul sous-ensemble à 0 éléments.

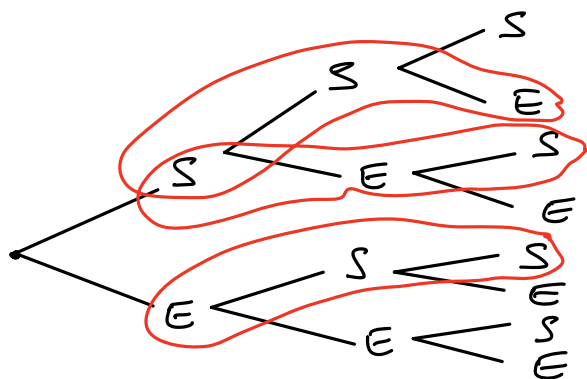
.  $\binom{m}{m} = 1$  car  $E$  est le seul sous-ensemble à  $m$  éléments.

Interprétation probabiliste:

. Rappelons qu'une expérience de Bernoulli est une expérience résultant en un succès ou un échec.

. Si l'on réalise une succession de  $m$  expériences de Bernoulli, il y a donc  $\binom{m}{k}$  façons d'obtenir  $k$  succès.

En effet il y a  $\binom{m}{k}$  façons de choisir les  $k$  expériences donnant un succès parmi les  $m$  expériences.



Soit cette succession de 3 expériences de Bernoulli ( $S$  = succès,  $E$  = échec), il y a  $\binom{3}{2} = 3$  successions comportant 2 succès.

### Propriété (Formule du triangle de Pascal):

Soient  $n \in \mathbb{N}$ ,  $k \in [1, n-1]$ :  $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$

Preuve: Soit  $E = \{a_1, \dots, a_n\}$  un ensemble à  $n$  éléments.

Considérons  $E_k = \{A \subset E \mid \text{card}(A) = k\}$ .

Par définition:  $\text{card}(E_k) = \binom{n}{k}$ .

$$\text{or } E_k = \underbrace{\{A \subset E \setminus \{a_n\} \mid \text{card}(A) = k\}}_{\substack{\text{les sous-ensembles à } k \text{ éléments} \\ \text{ne contenant pas } a_n : \\ \text{il y en a } \binom{n-1}{k}}} \sqcup \underbrace{\{A \subset E \mid \text{card}(A) = k \text{ et } a_n \in A\}}_{\substack{\text{les sous-ensembles à } k \text{ éléments} \\ \text{contenant } a_n : \\ \text{il y en a } \binom{n-1}{k-1}}}$$

donc  $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$  car les ensembles sont disjoints.

Proposition: Soient  $n \in \mathbb{N}$ ,  $k \in [0, n]$ :  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ .

Preuve: Posons  $P(n) = " \forall k \in [0, n] \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} "$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Par récurrence:

- $n=0$ . Soit  $k \in [0, 0]$ ,  $\binom{0}{0} = 1$  et  $\frac{0!}{0!(0-0)!} = 1$   
donc  $P(0)$  est vraie.

• Supposons  $P(m)$  vraie pour un entier  $m \in \mathbb{N}$ . Montrons  $P(m+1)$ .

Soit donc  $k \in [0, m+1]$ .

• Pour  $k = m+1$ , on a  $\binom{m+1}{m+1} = 1$  et  $\frac{(m+1)!}{(m+1)! \cdot 0!} = 1$ .

• Pour  $k = 0$ , on a  $\binom{m+1}{0} = 1$  et  $\frac{(m+1)! \cdot 0!}{0! \cdot (m+1)!} = 1$ .

• Pour  $k \in [1, m]$ , utilisons la formule de Pascal:

$$\binom{m+1}{k} = \binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} = \frac{m!}{k! (m-k)!} + \frac{m!}{(k-1)! (m-(k-1))!} \text{ d'après } P(m)$$

$$= \frac{m! (m-k+1)}{k! (m-k)! (m-k+1)} + \frac{m! \cdot k}{(k-1)! \cdot k (m-k+1)!} = \frac{m! (m-k+1+k)}{k! (m-k+1)!}$$

$$= \frac{m! (m+1)}{k! (m+1-k)!} = \frac{(m+1)!}{k! (m+1-k)!} = \binom{m+1}{k}.$$

Donc  $P(m+1)$  est vraie, donc par principe de récurrence,  $P(m)$  est vraie pour tout  $m \geq 0$ .

Remarque: On peut enfin calculer explicitement les valeurs de  $\binom{m}{k}$ .

Par exemple  $\binom{32}{3} = \frac{32!}{3! 29!} = \frac{32 \times 31 \times 30}{3 \times 2} = 4960$

Cela est égal, notamment, au nombre de tirages de celle possible en ECG-1.

Propriétés: Soient  $m \in \mathbb{N}$ ,  $k \in [0, m]$ .

•  $\binom{m}{k} = \binom{m}{m-k}$  •  $\binom{m}{1} = \binom{m}{m-1} = m$ .

•  $k \binom{m}{k} = m \binom{m-1}{k-1}$  (Très utile en pratique)

Preuve: On utilise l'expression factorielle :

$$\cdot \binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!} = \frac{m!}{(m-(m-k))!(m-k)!} = \binom{m}{m-k}.$$

$$\cdot \binom{m}{1} = \frac{m!}{1!(m-1)!} = m \quad \text{et} \quad \binom{m}{m-1} = \binom{m}{m-(m-1)} = \binom{m}{1} = 1. \quad \text{d'après le premier point}$$

$$\cdot k \binom{m}{k} = k \cdot \frac{m!}{k!(m-k)!} = \frac{m!}{(k-1)!(m-k)!} = m \cdot \frac{(m-1)!}{(k-1)!(m-1-(k-1))!} = m \binom{m-1}{k-1}.$$

$m-1-(k-1) = m-k$

Remarque: On peut prouver la formule  $\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}$  de manière combinatoire :

Soit  $E$  un ensemble à  $m$  éléments et  $A \subset E$  un sous-ensemble à  $k$  éléments de  $E$ .

Il y a  $k!$  façons de permuter les éléments de  $A$  pour en faire une liste ordonnée.

Ainsi, il y a  $k!$  fois plus d'arrangements à  $k$  éléments de  $E$  que de sous-ensembles à  $k$  éléments de  $E$ , donc :  $\frac{m!}{(m-k)!} = k! \binom{m}{k}.$

$$\text{On retrouve donc } \binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}.$$

exemple: Soit  $E = \{0, 1, 2, 3\}$ .

Soit  $A_3 = \{0, 2, 3\}$  une partie à 3 éléments.

On peut voir  $3! = 6$  listes ordonnées à partir de  $A_3$ :

$(0, 2, 3); (0, 3, 2); (2, 0, 3); (2, 3, 0); (3, 0, 2); (3, 2, 0)$

Pour chaque partie à 3 éléments, il y a  $3!$  arrangements à 3 éléments.

#### 4- Exemples classiques d'utilisation de $\binom{m}{k}$ .

- Les poignées de  $k$  boules dans une urne de  $m$  boules différentes.

Il y a  $\binom{m}{k}$  façons de tirer  $k$  boules simultanément (une poignée ou des tirages successifs sans remise où on ne regarde pas l'ordre) dans une urne de  $m$  boules.

exemple: Soit une urne contenant 3 bleues, 5 noires et 2 rouges toutes distinctes. On tire une poignée de 4 boules.

Il y a donc  $\binom{10}{4}$  poignées possibles.

Il y a  $\binom{3}{2} \times \binom{5}{1} \times \binom{2}{1}$  poignées contenant 2 bleues, 1 noire et 1 rouge.

- Les mains d'un jeu de carte.

exemple: On joue au Poker avec un jeu de 52 cartes. Une main est constituée de 5 cartes (donc, comme une poignée de 5 cartes).

Il y a donc  $\binom{52}{5}$  mains possibles.

Il y a  $\binom{13}{5}$  mains ne contenant que des cœurs.

Il y a  $\binom{12}{3} \times \binom{4}{2}$  mains composées de 3 figures et une paire de 7.

Retenez bien que les  $\binom{m}{k}$  s'utilisent pour compter des ensembles sans ordre.