TD : Sommes doubles et dénombrement

1. Quel est le cardinal des ensembles suivants ($n \in \mathbb{N}^*$).
   (a) $\{1, \ldots, n\}$;
   (b) $\{-n, \ldots, n\}$;
   (c) $\{n, \ldots, 2n\}$;
   (d) $\{2k, k \in \{0, \ldots, n\} \times \{2k+1, k \in \{0, \ldots, n\}\}$.
   (e) $\{0,1\}^n$
   (f) $\{k \in \mathbf{N}^* / k^2 < 101\}$
   (g) $\{k \in \mathbf{Z} / k^2 < 101\}$
   (h) $P(\{1, \ldots, n\})$
   (i) $P(P(\{0,1\}))$

2. Soit $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ une suite double de nombres réels. Soit n et m deux entiers naturels. Intervertir les sommes doubles suivantes :
   (a) $S_1 = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=i}^{n} a_{i,j}$
   (b) $S_2 = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} a_{i,j}$;
   (c) $S_3 = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=i}^{m} a_{i,j}$ où on a supposé $n \leq m$.

3. Calculer les sommes suivantes, $n \in \mathbf{N}^*$
   (a) $\sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{n} 1$
   (b) $\sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{n} i$
   (c) $\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{k-1} \frac{l}{k}$
   (d) $\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{k-1} l$
   (e) * $\sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} \min(k,l)$

4. Montrer que :

   Soient $n, p \geq 1$. Démontrer que

$$\begin{pmatrix} n-1 \\ p-1 \end{pmatrix} = \frac{p}{n} \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$$

5. Pour $n \in \mathbf{N}$ et a, b réels non nuls, simplifier les expressions suivantes :
   (a) $(n+1)! - n!$
   (b) $\frac{(n+3)!}{(n+1)!}$
   (c) $\frac{n+2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}$
   (d) $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ où $u_n = \frac{a^n}{n! b^{2n}}$.

6. Déterminer :
   (a) Le nombre de façons de faire un code à 12 symboles différents avec 12 symboles.
   (b) Le nombre de façons de faire un code à 12 symboles différents avec 20 symboles.
   (c) Le nombre de groupes de TD possibles en ECG1 (il y a 33 élèves et un groupe de 17 et un de 16).
   (d) Le nombre de façons d'avoir 10 fois pile quand on lance une pièce 30 fois.
   (e) Le nombre de façons d'avoir 20 fois face quand on lance une pièce 30 fois.
   (f) Le nombre de façons d'avoir au moins 10 piles quand on lance une pièce 30 fois.
   (g) Le nombre de groupes d'une personne dans un groupe de 100 personnes.
   (h) Le nombre de groupes de 99 personnes dans un groupe de 100 personnes.
   (i) On dispose d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n et on vide l'urne en tirant les boules les une après les autres. Combien y a t-il de façons de vide l'urne ?
   (j) On dispose d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n et on tire succesivement et sans remises p boules ($p < n$). Combien y a t-il de façons de faire ces p tirages ?
   (k) On dispose d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n et on tire succeivement et avec remise n boules. Combien y a t-il de tirages possibles ?

7. Soient $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites de nombres réels. On définit deux suites $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ en posant : $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $\quad b_n = B_{n+1} - B_n$.
   (a) Démontrer que $\sum_{k=0}^{n} a_k B_k = A_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_k$.
   (b) En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} 2^k k$.